Специальность «Фундаментальные математика и механика», образовательная программа «Фундаментальная математика и математическая физика»

Содержание

1 Общие сведения

Образовательная программа «Фундаментальная математика и математическая физика» (ФММФ) разработана в 2020 году на механико-математическом факультете МГУ имени М.В.Ломоносова при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС». Программа реализуется совместно с Институтом теоретической и математической физики МГУ.

Программой с самого начала ее существования руководит академик РАН, доктор физико-математических наук И.А. Тайманов.

Главной особенностью новой образовательной программы является сочетание сильной математической подготовки с уклоном в современные курсы теоретической физики, обучение студентов физическому взгляду на задачи и необходимому для понимания языка физических теорий математическому аппарату.

Основу программы составляют новые современные курсы:

- Теоретико-полевые структуры

- Спектральная теория операторов
- Основы теории гомологий
- Основы теории Ли
- Теория алгебраических многообразий
- Теория римановых поверхностей
- Теория Морса и характеристические классы
- Коммутативная алгебра
- Математические и статистические модели
- Теория динамических систем

Кроме того, существенно модернизированы курсы по математическому анализу, дифференциальной геометрии и топологии и другие базовые дисциплины. В качестве преподавателей приглашены ученые, математики и физики, проводящие исследования на международном уровне. Научная подготовка студентов начнется со второго курса. К научному руководству студентами привлекаются ведущие исследователи из МГУ и других российских научных центров.

Выпускники программы будут обладать сильным математическим аппаратом и пониманием современных физических теорий, что позволит им продолжить успешную академическую карьеру в России и за рубежом и проводить междисциплинарные исследования или развиваться в сфере высокотехнологичного бизнеса, в том числе в сфере IT.

2 Набор

В 2020 году из заинтересованных студентов первого курса механико-математического факультета была сформирована группа, которая со второго курса продолжила обучение в рамках образовательной программы «Фундаментальная математика и математическая физика».

В 2021 году состоялся первый набор на образовательную программу ФММФ в рамках отдельного конкурса (с общим набором экзаменов для всех образовательных программ специалитета механико-математического факультета). Группа второго курса была сформирована весной из заинтересованных студентов первого курса.

В 2022–2025 годах набор на образовательную программу ФММФ проводился в рамках отдельного конкурса (с общим набором экзаменов для всех образовательных программ специалитета механико-математического факультета).

3 Проходные баллы на бюджетные места и количество бюджетных мест набора

В 2021–2014 годах количество бюджетных мест на программу: **25**, в 2024 году — **30** и в 2025 году — **40**.

Вступительные испытания: математика (ДВИ, письменно), математика (ЕГЭ), физика (ЕГЭ), русский язык (ЕГЭ). Максимальная сумма баллов: 400

Год набора	математика	механика	фундаментальная математика и математическая физика
2019	339	337	–
2020	349	347	–
2021	323	270	328
2022	315	312	346
2023	317	300	376
2024	331	321	379
2025	322	317	357

4 Выпускники

В 2025 году состоялся первый выпуск студентов программы, выпустились 9 студентов, шестеро из них поступили в аспирантуру (мехмат, ВМиК, МИАН, ИВМ).

5 Список полугодовых спецкурсов, разработанных и прочитанных для студентов образовательной программы ФММФ

2021/22 уч.год

1. Геометрия и квазиклассический асимптотики (В.Е.Назайкинский, А.И.Шафаревич)
2. Геометрия и квазиклассические асимптотики-2. Решение конкретных задач (В.Е.Назайкинский, А.И.Шафаревич)
3. Инварианты Дональдсона гладких структур на 4-мерных многообразиях (Н.А.Тюрин)
4. Теоретические основы и методы обучения глубоких нейросетей (Е.В.Бурнаев)
5. Теория Галуа, алгебраические группы и дифференциальные уравнения (С.О.Горчинский)
6. Эллиптические операторы и теорема об индексе (А.Ю.Савин)

2022/23 уч.год

1. Римановы поверхности и приложения (А.Б.Богатырев)
2. Дополнительные главы дифференциальной геометрии (Г.И.Шарыгин)
3. Проективное пространство: геометрия и механика (Н.А.Тюрин)
4. Римановы поверхности и приложения (А.Б.Богатырев)
5. Эффективные квазиклассические асимптотики (В.Е.Назайкинский, А.И.Шафаревич)

2023/24 уч.год

1. Введение в симметрические пространства (В.С.Жгун)
2. Римановы поверхности и приложения (А.Б.Богатырев)
3. Введение в симметрические пространства II (В.С.Жгун)
4. Арифметика квадратичных форм в аналитической теории чисел (А.Б.Калмынин)
5. Геометрические основы калибровочных теорий (Н.А.Тюрин)
6. Спектральная теория операторов: дополнительные главы (В.Е.Назайкинский)
7. Введение в обратные задачи математической физики, (В.Н.Сивкин)

2024/25 уч.год

1. Методы анализа данных (Е.А.Илларионов)
2. Метод комплексного ростка Маслова и квазиклассические асимптотики (В.Е.Назайкинский)
3. Теория модулярных форм (А.Б.Калмынин)

2025/26 уч.год

1. Методы анализа данных (Е.А.Илларионов)
2. Теория индекса и операторы Дирака (А.Ю.Савин)
3. Квантовые группы (А.С.Гордиенко)
4. Геометрия и квазиклассическое квантование, часть 2 (В.Е.Назайкинский, А.И.Шафаревич, А.В.Цветкова)

6 Программы курсов

Курс I, осень

Алгебра - 1

1. Системы уравнений. Метод Гаусса. Системы однородных уравнений. Связь однородных и неоднородных систем линейных уравнений.
2. Матрицы. Сложение и умножение матриц. Ассоциативность умножения. Матричная запись систем линейных уравнений. Понятие кольца. Кольшо матриц.
3. Произведение подстановок. Обратная и единичные подстановки. Понятие группы. Транспозиции. Разложение подстановки в произведение транспозиций.
4. Число подстановок. Независимые подстановки (коммутирование). Циклы. Разложение подстановки в произведение независимых циклов.
5. Четность. Корректность определения четности. Четность произведения подстановок. Четность обратной подстановки. Число четных и нечетных подстановок. Группа A_n.
6. Определители. Определитель транспонированной матрицы. Вычисление определителя при помощи элементарных преобразований.
7. Полилинейность и кососимметричность определителя. Эквивалентное определение определителя (как полилинейной кососимметрической формы).
8. Определитель с углом нулей. Разложение (и фальшивое) определителя по строке.
9. Определитель Вандермонда. Теорема и формулы Крамера.
10. Определитель произведения матриц.
11. Обратная матрица. Единицы и обратные элементы в ассоциативном кольце (единственность). Критерий существования обратной матрицы. Формула для обратной матрицы.
12. Матричные единицы. Вычисление обратной матрицы при помощи элементарных преобразований. Делители нуля в кольце. Делители нуля в кольце матриц.
13. Векторные пространства. Линейная зависимость. Лемма о линейной зависимости. Критерий невырожденности матрицы.
14. Базис. Координаты. Размерность векторного пространства и подпространства. Ранг матрицы. Ранг суммы матриц.
15. Ранг произведения матриц. Теорема о ранге матрицы.
16. Критерий совместности системы линейных уравнений. Решения однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
17. Линейные отображения и изоморфизмы векторных пространств. Изоморфизм векторных пространств одной размерности.
18. Гомоморфизмы групп и колец. Ядро и образ гомоморфизма.
19. Поля. Определение, свойства, примеры. Конечномерная ассоциативная алгебра без делителей нуля является алгеброй с делением.
20. Поле комплексных чисел. Аксиоматическое определение, существование, единственность. Алгебраическая запись. Вещественная и мнимая части. Комплексное сопряжение.

21. Тригонометрическая запись комплексного числа. Модуль, аргумент. Сложение и умножение на комплексное число как преобразования плоскости. Формула Муавра.
22. Теорема Вильсона. Характеристика поля. Отображение Фробениуса.
23. Кольцо многочленов. Доказательство существования. Степень многочлена. Делители нуля в кольце многочленов. Подстановка, элемента в многочлен. Восстановление многочлена по его значениям (для любого поля).
24. Корни многочленов. Интерполяционная формула Лагранжа. Схема Горнера. Теорема Безу.
25. Кратность корня. Деление многочленов над полем с остатком. Делимость в кольцах. Неприводимые многочлены. Наибольший общий делитель.
26. Алгоритм Евклида. Факториальность кольца многочленов над полем. Факториальные и евклидовы кольца.
27. Дифференцирования. Дифференцирования кольца многочленов над полем. Понижение кратности при дифференцировании. Формула Тейлора.
28. Сходимость последовательностей комплексных чисел. Лемма о возрастании модуля многочлена. Основная теорема алгебры (схема доказательства).
29. Лемма Даламбера. Лемма о возрастании модуля многочлена (формулировка). Основная теорема алгебры (доказательство).
30. Поле частных целостного кольца. Поле рациональных функций. Разложение дроби в сумму простейших. Простейшие дроби над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.
31. Лемма Гаусса. Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом.
32. Многочлены от нескольких переменных. Лексикографический и однородный порядки. Лемма о старшем члене.
33. Формулы Виета. Основная теорема о симметрических многочленах.
34. Дискриминант. Результант (определение и свойства). Вычисление результанта.
35. Циклические группы. Примеры. Подгруппа циклической группы. Циклические подгруппы. Порядок элемента. Изоморфизм циклических групп одного порядка.
36. Смежные классы. Теорема Лагранжа. Малая теорема Ферма. Нормальные подгруппы. Факторгруппа.
37. Теоремы о гомоморфизме групп и колец.
38. Присоединение к полю корня неприводимого многочлена.

Аналитическая геометрия

1. Элементарные свойства кривых второго порядка: фокальное свойство, конические сечения, аналитическое задание коник, директориальное свойство.
2. Элементарные свойства коник: оптическое свойство эллипса, параболы; уравнение коник в полярной системе координат.
3. Векторы: операции с векторами на плоскости и в пространстве; аксиомы векторного пространства, линейная зависимость, базис векторного пространства, система координат.

4. Аффинное пространство $\mathbb{R}^n$, аффинные системы координат, связь аффинных координат и координат векторов, деление отрезка в заданном отношении.
5. Линейные функции от вектора. Скалярное произведение: определение, абстрактные свойства, выражение в произвольном базисе, матрица Грама, ортонормированный базис. Координаты вектора в ортонормированном базисе, определитель матрицы Грама и объем (площадь), изменение матрицы Грама при замене базиса.
6. Ориентированная площадь и ориентированный объем: ориентация базиса, непрерывные семейства базисов, выражение площади и объема через определитель. Абстрактные полилинейные свойства ориентированных площади и объема.
7. Векторное произведение. Смешанное произведение, доказательство совпадения с ориентированным объемом. Абстрактные свойства векторного произведения. Формула векторного произведения в ортонормированном базисе.
8. Алгебры Ли. Определение, биекция $\mathbb{R}^3$ в алгебру Ли $\mathfrak{so}(3)$, доказательство тождество Якоби векторного произведения, "$bac - cab$".
9. Прямые и плоскости в пространстве: параметрическое задание и общее уравнение прямой и плоскости; леммы о том, когда разные задания отвечают одной и той же прямой или плоскости.
10. Прямые и плоскости: условие параллельности вектора и прямой, полуплоскости, формула для направляющего вектора прямой в пространстве в произвольной системе координат.
11. Пучки прямых: условие параллельности и пересечения прямых, теорема о всех прямых из пучка. Теорема о том, что две различные прямые содержатся в одном единственном общем пучке. Пучки плоскостей, связки плоскостей: теорема о всех плоскостях пучка, связки; необходимое и достаточное условия принадлежности четырех плоскостей одной связке.
12. Метрические задачи на прямые и плоскости в ортогональной системе координат: вектор нормали, угол между прямыми, расстояние от точки до плоскости, расстояние между скрещивающимися прямыми.
13. Задачи аффинной и ортогональной классификации: определение, классификация пар прямых на плоскости, в пространстве и 4-х мерном пространстве, классификация троек прямых на плоскости. Ортогональная классификация и инварианты.
14. Аффинные замены координат: Матрица замены, формула замены координат; композиция замен координат. Ортогональные замены координат, ортогональные матрицы, описание $O(2)$ для $n = 2$.
15. Ортогональные матрицы при $n = 3$, углы Эйлера, отображение Кэли.
16. Алгебраические уравнения при аффинных заменах координат: инвариантность степени уравнения при аффинных заменах, общий вид уравнения кривой второго порядка.
17. Каноническое уравнение кривой второго порядка: теорема о приведении к каноническому виду с помощью перехода к собственному базису.
18. Ортогональные инварианты кривых второго порядка: определение, доказательство инвариантности оведение инвариантов при умножении уравнения на число, полуинвариант.

19. Постановка задачи классификации кривых второго порядка. Связь с геометрической классификацией для кривых с более чем одной точкой.
20. Определение типа кривой по инвариантам и полуинварианту. Взаимное расположение кривой второго порядка и прямой: асимптотические направления, теорема о возможном пересечении прямой и кривой второго порядка.
21. Особые точки, уравнение касательной прямой. Формула в частных производных,
22. Особые точки, уравнение касательной прямой. Формула в частных производных, доказательство эквивалентности определения через кратную точку.
23. Линейные системы квадрик: теорема о том, что через 5 точек общего положения проходит единственная квадрика; распадающиеся кривые, классификация геометрических квадрик, то есть ГМТ содержательных квадрик.
24. Теорема Паскаля, Паппа.
25. Поляра, теорема Брианшона. Двойственная квадрика.
26. Диаметры: определение, уравнение; главные диаметры и оси симметрии, лемма о том, что собственные векторы задают главные диаметры.
27. Центры: центр уравнения, принадлежность центра уравнения диаметрам, теорема о совпадении геометрических и центров уравнений для содержательных кривых, описание множества центров.
28. Аффинная классификация кривых второго порядка. Поверхности второго порядка и их первые свойства: эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, конус, параболоиды: сечения, прямолинейные образующие.
29. Общее уравнение поверхности второго порядка, лемма о приведение квадратичной формы в размерности 3 к каноническому виду.
30. Теорема о приведении уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду. Ортогональные инварианты и полуинварианты. Определение грубого типа поверхностей по инвариантам, теорема ортогональной классификации.
31. Пересечение поверхностей с прямыми: теорема о пересечении прямой (не)асимптотического направления с поверхностью, особые точки, касательные плоскости, пересечение поверхности с касательной плоскостью.
32. Диаметральная плоскость: лемма о наличие трех линейно независимых неасимптотических направлений для любой поверхности. Центр поверхности, условие единственности центра, главные направления и плоскости симметрии.
33. Сечение поверхности второго порядка плоскостью: степень сечения, лемма о том, что две поверхности имеющие одинаковые сечения отличаются на уравнение распадающейся поверхности, инварианты пересечения $(I1, I2)$.
34. Аффинные преобразования: определение через геометрические свойства, представление в координатах, определение через две аффинные системы координат, преобразование матрицы аффvинного преобразования при заменах координат. Действие аффинного преобразования на векторах, произведение матриц при композиции аффинных преобразований.
35. Изометрические преобразования: критерии изометричности.
36. Изометрии плоскости и Теорема Шаля

37. Классификация изометрий трехмерного пространства, замечания об изометриях из $SO(3)$.
38. Кватернионы: вещественные, мнимые кватернионы, длина, сопряженный и обратный кватернион; изоморфизм группы единичных кватернионов и $SU(2)$; действие единичных кватернионов на чисто мнимых кватернионов, гомоморфизм $SU(2) \to SO(3)$, сюрьективность.
39. Кривые и поверхности второго порядка при аффинных преобразованиях: инвариантные свойства, классификация кривых второго порядка с точностью до аффинных преобразований, теорема о представлении любого аффинного преобразования в виде композиции движения и преобразования растяжения-сжатия.
40. Проективная прямая: модель пополненной прямой, арифметическая модель, модель пучка, однородные координаты и аффинные карты.
41. Двойное отношение: теорема о независимости двойного отношения от однородных координат; проективные преобразования прямой, выражение в координатах, лемма о единственности проективного преобразования, переводящего три точки в три точки.
42. Проективная плоскость: модель пополненной плоскости, множество пучков на аффинной плоскости, несобственная прямая, свойства прямых и точек на проективной плоскости; модель связки, однородные координаты, аффинные карты, уравнение проективной прямой на проективной плоскости, принцип двойственности, двойственное утверждение для теоремы Дезарга.
43. Преобразования прямой и дробно-линейные преобразования, совпадение с $PGL(2, \mathbb{R})$; неподвижные точки проективного преобразования прямой: эллиптический, гиперболический и параболический случаи.
44. Проективные преобразования проективной плоскости: геометрическое определение; проективные преобразования, индуцированные аффинными преобразованиями трехмерного пространства, представление проективных преобразований в однородных координатах; теорема о том, что проективное преобразование однозначно задается образами 4-х точек, никакие три из которых не лежат на одной проективной прямой.
45. Определение $PGL(3)$, представление проективных преобразований в аффинных координатах, существование проективного преобразования переводящего заданную прямую в несобственную, доказательство теоремы Дезарга и того, что четырехвершинник определяет гармоническую четверку.
46. Кривые второго порядка на проективной плоскости: понятие кривой второго порядка, теорема о приведении к каноническому виду, уравнение касательной прямой к кривой второго порядка на проективной плоскости; асимптоты кривой второго порядка, как касательные в бесконечно-удаленной точке; рациональная параметризация овалов и коника Веронезе.
47. Понятие многообразия Грассмана $G(2, 4)$: параметризации матрицами и карты многообразия $G(2, 4)$, координаты Плюккера, отображение Плюккера в $\mathbb{P}(5)$, квадрика Плюккера, биективность отображения Плюккера.
48. Гиперболические повороты, гиперболическая длина дуги, выражение через двойное отношение, псевдоевклидово скалярное произведение, связь гиперболической длины с псевдо-евклидовым скалярным произведением.

49. Плоскость Лобачевского на гиперболоиде в пространстве Минковского: геодезические (прямые), свойства прямых и точек, абсолют; модель Клейна и неравенство треугольника.
50. Модель Пуанкаре: лемма о том, что геодезические переходят в дуги окружностей, перпендикулярные абсолюту. Псевдоевклидово произведение и его ограничение на касательные плоскости к гиперболоиду. Набросок доказательства совпадении углов на гиперболоиде и в модели Пуанкаре.
51. Сферическая геометрия: стереографическая проекция, доказательство сохранения углов при стереографической проекции, сферические теоремы синусов и косинусов, площадь и угловой дефект, с помощью двуугольников.
52. Геометрия Лобачевского: аналог векторного произведения, теоремы синусов и косинусов, угловой дефект с помощью бесконечного измельчения.
53. Движения плоскости Лобачевского: группа изометрий L^2, группа $O_+(1,2)$, группа $PO_+(1,2)$. Изоморфизмы перечисленных групп.

Математический анализ

1. Операции над множествами и их свойства. Законы Моргана. Декартово произведепие множеств. Отношение множеств. Отношения эквивалентности и порядка. Понятие функции. Инъекция, сюръекция и биекция. Существование обратной функции. Групповое свойство биекций множества на себя.
2. Множество натуральных чисел. Аксиомы Пеано. Арифметические операции. Линейный порядок. Свойство ограниченности снизу подмножества натуральных чисел. Мощность множества. Счетные множества. Мощность подмножества натуральных чисел. Кольцо целых чисел, Счетность множества целых чисел. Архимедово поле рациональных чисел. Счетность декартова произведения счетных множеств. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества всех подмножеств счетного множества.
3. Аксиоматика действительных чисел. Аксиома полноты. Бесконечные десятичные дроби как модель множества действительных чисел. Принцип полноты Вейерштрасса. Вывод аксиомы Архимеда из принципа полноты Вейериттрасса. Плотность множества рациопальных чисел. Принцип полноты Кантора. Несчетность множества действительных чисел. Существование иррациональных чисел.
4. Понятие предела последовательности. Локальное свойство предела. Единственность предела. Необходимое условие сходимости. Свойство отделимости. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства бесконечно малых. Арифметика пределов. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Лемма о зажатой сходимости.
5. Теорема Вейсрштрасса о монотонной сходимости. Вычисление квадратного корня посредством приближения рекуррентной последовательностью. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона. Число . Оценка скорости сходимости последователъности $(1+1/n)^n$. Двусторонняя оценка натурального логарифма.

6. Понятие числового ряда. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Ряд первых разностей. Факториальное разложение числа e. Арифметические операции над рядами. Удаление–добавление членов ряда. Необходимое условие сходимости числового ряда. Остаток ряда. Иррациональность числа e.
7. Понятие подпоследовательности. Теорема Больцано о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности. Критерий Коши существования предела последовательности. Критерий Коши сходимости ряда. Теорема Чезаро о сходимости средних арифметических. Теорема Штольца. Асимптотика частичных сумм гармонического ряда.
8. Внутренние, граничные, внешние и предельные точки множества. Структура открытых и замкнутых множеств на числовой прямой. Множество Кантора и его простейшие свойства. Теорема, Больцано о существовании предельной точки ограниченного бесконечного множества. Теорема Гейне–Бореля о компактности отрезка.
9. Определения Коши и Гейне предела функции в точке, их эквивалентность. Локальное свойство предела функции. Единственность предела функции. Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Свойство отделимости. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства бесконечно малых функций. Арифметика пределов. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Лемма о зажатой сходимости. Односторонние пределы. Теорема о монотонной сходимости. Критерий Коши существования предела функции.
10. Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций: локальная ограниченность, отделимость, арифметические свойства. Теорема, о пределе композиции функций. Непрерывность композиции функций. Классификация разрывов функции. Структура разрывов монотонной функции.
11. Непрерывные на отрезке функции. Глобальные свойства непрерывных функций: теоремы Вейерштрасса и Коши. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности непрерывной на отрезке функции. Модуль непрерывности.
12. Теорема о непрерывности обратной функции. Непрерывность тригонометрических функций. I замечательный предел и его вариации. Непрерывность показательной, логарифмической и степенной функций. II замечательный предел и его вариации. Эквивалентные бесконечно малые функции. -символика. Таблица эквивалентных бесконечно малых.
13. Производная и дифференциал первого порядка. Их физический и геометрический смысл. Критерий дифференцируемости функции. Непрерывность дифференцируемой функции. Производная и дифференциал линейной комбинации, произведения и частного функций. Производная и дифференциал композиции функций. Инвариантность формы первого дифференциала. Производная обратной и параметрически заданной функций. Таблица производных элементарных функций.
14. Вторая производная, ее физический и геометрический смысл. Производная n-го порядка. n-я производная линейной комбинации и композиции произвольной и линейной функций. Таблица производных элементарных функций n-го порядка. Правило Лейбница вычисления n-й производной произведения функций. Односторонние производные. Критерий дифференцируемости в терминах односторонних производных.

15. Локальный и глобальный экстремум функции. Основные теоремы дифференциального исчисления: необходимое условие экстремума (теорема Ферма), теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о промежуточном значении производной функции. Достаточное условие существования односторонней производной. Точки разрыва производной всюду диффереицируемой на промежутке функции. Необходимое условие монотонности функции на интервале. Достаточное условие строгой монотонности функции на отрезке. Дифференцирование неравенств.
16. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей $0/0$ и ∞/∞. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, Коши, Лагранжа. Многочлены Тейлора функций e^x, $\cos$, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$, $\ln(1+x)$. Оценка остаточных членов этих функций. Многочлены Тейлора функций $\arccos x$ и $\arcsin x$. Достаточные условия локального экстремума.
17. Выпуклые и вогнутые на промежутке функции. Монотонность угла паклона секущей выпуклой функции. Непрерывность выпуклой на интервале функции. Существование односторонних производных выпуклой на интервале функции. Неравенства между односторонними производными выпуклой на иитервале функции. Дифференцируемость выпуклой на интервале функции всюду, за исключением не более чем счетного множества.
18. Необходимое условие выпуклости на интервале в терминах монотонности производной. Достаточное условие выпуклости на отрезке в терминах монотонности производной. Необходимое условие выпуклости на интервале в терминах второй производной. Достаточное условие строгой выпуклости на отрезке в терминах второй производной. Неравенство Йенсена. Неравенство Коши.
19. Опорная прямая. Эквивалентное определение выпуклой на промежутке функции. Точка перегиба дифференцируемой функции. Необходимое условие перегиба. Достаточные условия перегиба.
20. Общая теория числовых рядов и бесконечных произведений. Абсолютная сходимость числового ряда. Возможность расстановки скобок в случае сходящегося ряда. Достаточные условия расстановки скобок в общем случае. Понятие бесконечного произведения. Бесконечное произведение отношений. Необходимое условие сходимости бесконечного произведения. Критерий сходимости бесконечного произведения в терминах ряда из логарифмов. Разложение синуса и косинуса в бесконечное произведение.
21. Связь сходимости последовательности со сходимостью ряда первых разностей и бесконечного произве- дения отношений. Постоянная Эйлера. Формула Валлиса. Формула Стирлинга. Сходимость рядов $\sum_{n=1}^\infty 1/n^p$ и $\sum_{n=2}^\infty 1/(n \ln^p n)$ 22. Знакопостоянные числовые ряды. Критерий Вейерштрасса, сходимости знакопостоянного числового ряда. Равносходимость знакопостоянного ряда и ряда с расставленными скобками. Безусловная сходимость знакопостоянного числового ряда. Признаки сходимости знакопостоянных числовых рядов. Первый признак сравнения. Второй признак сравнения. Асимптотический признак сравнения. Признак Д'Аламбера. Признак Коши. Признак Гаусса. Признак Бертрана. Теорема Коши о разрежении. Сходимость рядов $\sum_{n=1}^\infty a_n/S_n^p$ и $\sum_{n=1}^\infty a_n/r_{n-1}^p$.
22. Знакопеременные ряды. Эквивалентность абсолютной и безусловной сходимости. Условная сходимость. Теорема Римана о перестановках числовых рядов. Признаки

сходимости знакопеременных рядов. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Преобразование Абеля. Признак Дирихле. Признак Абеля.

23. Произведение рядов по Коши. Теорема Коши. Теорема Мертенса. Пример расходящегося произведения сходящихся рядов.
24. Интеграл Ньютона и его физический смысл. Единственность, линейность, аддитивность интеграла Ньютона. Интегрирование неравенств. Замена переменной и интегрирование по частям в интеграле Ньютона. Таблица неопределенных интегралов.
25. Обобщенный интеграл Ньютона. Единственность, линейность, аддитивность обобщенного интеграла Ньютона. Интегрирование неравенств. Замена переменной и интегрирование по частям в обобшенном интеграле Ньютона. Лестница, Кантора и ее свойства.
26. Несобственный интеграл. Сходимость интегралов $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^p x}$, сходимость интеграла от точной производной. Замена переменной в несобственном интеграле. Критерий Коши сходимости несобственпого интеграла. Сведение песобственного интеграла к числовому ряду.
27. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Критерий Вейерштрасса, сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции. Признаки сравнения. Интегральный признак Коши- Маклорена сходимости числового ряда. Несобственные интегралы от знакопеременных функций. Абсолют ная сходимость. Интегрирование по частям в несобственном интеграле как метод ускорения сходимости, Признак Дирихле. Признак Абеля.

Элементы теории чисел

1. Делимость. Элементарные свойства, делимости. Деление с остатком.
2. Алгоритм Евклида. Теорема Ламе.
3. Представление н.о.д. двух чисел в виде их линейной комбинации. Важная лемма.
4. Теорема Евклида. Основная теорема арифметики.
5. Конечные цепные дроби. Рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подхо- дящих дробей. Разложение вещественного числа в бесконечную цепную дробь.
6. Сравнения по модулю. Элементарные свойства сравнений. Классы вычетов. Сложение и умножение классов вычетов. Полная и приведённая системы вычетов.
7. Теорема Эйлера, малая теорема Ферма, теорема Вильсона.
8. Китайская теорема об остатках. Мультипликативность количества решений полиномиального сравнения.
9. Количество решений полиномиального сравнения по простому модулю.
10. Подъём решения полиномиального сравнения. Лемма Гензеля.
11. Сравнения второй степени. Квадратичные вычеты. Критерий Эйлера.
12. Символ Лежандра. Элементарные свойства символа Лежандра. Лемма Гаусса.
13. Квадратичный закон взаимности.
14. Символ Якоби и его свойства.
15. Мультипликативность функции Эйлера. Явная формула для функции Эйлера.

16. Показатель вычета по модулю. Первообразные корни. Существование первообразных корней по простому модулю.
17. Мультипликативные функции. Формула обращения Мёбиуса.
18. Линейные диофантовы уравнения. Матричный алгоритм.
19. Теорема Эйлера-Лагранжа о цепных дробях.

Курс I, весна

Математический анализ

1. Числовой ряд. Признаки сравнения. Признаки Даламбера и Коши. Признак Лейбница. Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимость числового ряда.
2. Группировка членов ряда. Теорема Римана и теорема Коши о перестановке членов ряда. Теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.
3. Бесконечные произведения. Необходимые и достаточные условия сходимости. Признак Гаусса сходимости ряда. Разложение синуса в произведение (без доказательства). Формула Стирлинга (без доказательства).
4. Несобственный интеграл. Признаки сравнения. Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимость. Интегральный признак сходимости ряда.
5. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле сходимости числового ряда. Интегрирование по частям. Признаки Абеля и Дирихле сходимости интеграла.
6. $\mathbb{R}^n$ — линейное, аффинное, евклидово, нормированное и метрическое пространство. Неравенство Коши—Буняковского—Шварца.
7. Сходимость последовательностей векторов $\mathbb{R}^n$ по евклидовой норме: сходимость координат, критерий Коши, теорема Больцано. Эквивалентность норм.
8. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$. Граница множества. Замыкание множества. Компактные множества. Критерии компактности.
9. Непрерывные функции на $\mathbb{R}^n$. Определение Гейне в терминах последовательностей. Непрерывность композиции. Теорема Вейерштрасса.
10. Определение Коши непрерывной функции. Эквивалентное определение непрерывной функции в терминах прообразов открытых множеств.
11. Равномерная непрерывность непрерывной функции на компакте. Связные множества и теорема о промежуточном значении.
12. Предел функции на $\mathbb{R}^n$ и его свойства: эквивалентные определения, арифметика пределов, переход к пределу в неравенствах.
13. Дифференцируемые функции на $\mathbb{R}^n$. Дифференциал. Производная по вектору. Частные производные. Градиент. Достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных.
14. Свойства дифференцируемых функций. Инвариантность первого дифференциала. Теорема о среднем.
15. Теорема о неявной функции.

16. Частные производные высокого порядка. Теорема Юнга. Дифференциалы высокого порядка. Формула для производной $\dfrac{d^k}{dt^k} f(a+th)$.
17. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и форме Пеано. Необходимые и достаточные условия локального экстремума.
18. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Арифметика равномерно сходящихся последовательностей. Критерий Коши равномерной сходимости.
19. Теорема о коммутировании пределов. Непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.
20. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Признак Дини.
21. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.
22. Дифференцирование предела последовательности дифференцируемых функций.
23. Интегрирование по Риману предела равномерно сходящейся последовательности интегрируемых по Риману функций. Формулировка теоремы Арцела.
24. Сходимость степенного ряда: первая и вторая теоремы Абеля, формула Коши–Адамара. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда.
25. Равномерная сходимость семейства функций: сведение к равномерной сходимости функциональных последовательностей и критерий Коши.
26. Теорема о коммутировании пределов для семейства функций, дифференцирование и интегрирование предела семейства функций.
27. Равномерная сходимость несобственного интеграла с параметром: критерий Коши, признак Вейерштрасса, признаки Абеля и Дирихле.
28. Непрерывность и дифференцируемость по параметру интеграла Римана.
29. Непрерывность и дифференцируемость по параметру несобственного интеграла Римана. Вычисление интеграла Дирихле.
30. Гамма и бета функции Эйлера: формулы понижения, формула Эйлера–Гаусса, формула дополнения, вычисление интеграла Пуассона, связь гамма и бета функций.

Линейная алгебра

1. Векторные пространства: определение, примеры, следствия из аксиом Линейная зависимость, базис, размерность. Векторные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда размерности совпадают. Всякое конечномерное векторное пространство изоморфно арифметическому. Поведение координат вектора при замене базиса.
2. Критерий того, что подмножество векторного пространства является подпространством. Сумма и пересечение подпространств и связь размерностей.
3. Линейные функции. Сопряжённое пространство. Изменение координат функционалов при изменении базиса. Когда «сопряжённый базис» является базисом?
4. Когда «канонический изоморфизм» является изоморфизмом?

5. Линейные отображение: ядро и образ — подпространства, критерий инъективности, связь размерностей ядра и образа, матрица линейного отображения, изменение матрицы при замене базисов, ранг — это единственный инвариант. Линейные операторы: изменение матрицы при замене базиса.
6. Характеристический многочлен оператора, определитель и след оператора. Какие многочлены является характеристическими (для подходящих операторов)?
7. Теорема Гамильтона—Кэли.
8. Корни характеристического многочлена, собственные векторы, собственные значения, собственные подпространства. Прямая сумма подпространств: определение и равносильность условию на пересечения. Сумма собственных подпространств прямая.
9. Критерий диагонализируемости на языке суммы собственных подпространств. Геометрическая и алгебраическая кратность собственного значения и неравенство, связывающее эти кратности. Подобие операторов и матриц. Критерий диагонализируемости на языке алгебраических и геометрических кратностей.
10. Корневые (векторы и) подпространства. Прямота их суммы. Эта сумма равна всему пространству (в конечномерном случае), если характеристический многочлен раскладывается на линейные множители.
11. Инвариантные подпространства. Инвариантность корневых и собственных подпространств. Локально нильпотентные и нильпотентные операторы. В конечномерном векторном пространстве нильпотентность равносильна локальной нильпотентности.
12. Канонический вид нильпотентного оператора (без единственности).
13. Теорема о жордановой нормальной форме (без единственности).
14. Единственность жордановой нормальной формы.
15. Алгоритм нахождения жордановой нормальной формы.
16. Минимальный многочлен. Он делит все аннулирующие. Корни у минимального такие же, как у характеристического.
17. Как найти минимальный многочлен по жордановой нормальной форме? Как по минимальному многочлену понять диагонализируем ли оператор (поле произвольное)?
18. Всякая комплексная матрица подобна своей транспонированной.
19. Извлечение корней из невырожденных комплексных матриц.
20. Комплексное подобие двух рациональных матриц влечёт их рациональное подобие.
21. Билинейные функции: их матрицы, закон изменения при замене базиса, разложение в сумму симметрической и кососимметрической.
22. Диагонализируемость симметрических билинейных функций.
23. Канонический вид квадратичных функций над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ (с единственностью, то есть инвариантность индексов инерции).
24. Канонический вид кососимметрической функции (с единственностью).
25. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к диагональному виду.
26. Метод Якоби приведения квадратичной формы к диагональному виду. Когда он работает? Теорема Якоби. Как восстановить индексы инерции по главным минорам?

27. Критерий Сильвестра.
28. Евклидовы пространства: неравенство Коши—Буняковского и неравенство треугольника, длина вектора, угол между векторами.
29. Ортонормированный базис, ортогонализация Грама—Шмидта. Разложения пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
30. Объём параллелепипеда, его выражение через определитель матрицы Грама.
31. Ортогональные операторы и ортогональные матрицы (и их определители). Какие бывают ортогональные операторы в двумерном пространстве?
32. Наличие двумерного или одномерного инвариантного подпространства у любого вещественного оператора.
33. Инвариантность ортогонального дополнения к инвариантному подпространству для ортогонального оператора.
34. Канонический вид для ортогонального и симметрического оператора.
35. Полярное разложение.
36. Приведение квадратичной формы к главным осям. Одновременная диагонализируемость двух вещественных симметрических функций, одна из которых положительно определена.
37. Полуторалинейные функции, их матрицы, эрмитовость и косоэрмитовость (функций и матриц), восстановление эрмитовой функции по $f(v, v)$.
38. Аналог теоремы Якоби и критерия Сильвестра для эрмитовых функций.
39. Унитарные пространства. Ортогонализация Грама—Шмидта.
40. Сопряжённые операторы. Эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные операторы, их матрицы и канонический вид.
41. Аффинные пространства. Репер. Поведение координат при замене репера. Аффинные преобразования и их матрицы.
42. Плоскости в аффинном пространстве. Их задание линейных системами уравнений.
43. Барицентрические комбинации точек. Аффинная оболочка. Связь между размерностями пересечения двух плоскостей и аффинной оболочки их объединения.
44. Аффинно-квадратичные функции: поведение при замене репера, «канонический» вид (без единственности в этом вопросе, но над любым полем характеристики не два).
45. Единственность канонического вида аффинно-квадратичной функции над полями комплексных и вещественных чисел.
46. Аффинное евклидово пространство. Расстояние между двумя плоскостями.
47. Движения в аффинном евклидовом пространстве. Неподвижные точки и инвариантные прямые.
48. Классификация движений в двумерном и трёхмерном евклидовом пространстве.
49. Тензоры. Как они связаны с линейными операторами? Тензорное произведение.
50. Симметрические и кососимметрические тензоры. Симметрирование и альтернирование.
51. Тензорная алгебра и внешняя алгебра, их базисы.

Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Вопросы к экзамену

1. Определение пропозициональных формул. Таблица истинности.
2. Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний ИВ. Вывод из гипотез. Теорема корректности.
3. Лемма о дедукции. Производные правила: разбор случаев, доказательства от противного.
4. Лемма о таблице истинности. Теорема полноты ИВ.
5. Синтаксис и семантика языка первого порядка с примерами. Нормальные интерпретации.
6. Изоморфные и элементарно эквивалентные интерпретации. Теорема об элементарной эквивалентности эпиморфных интерпретаций.
7. Логические теории и их модели. Семантическое следование. Совместные и семантически полные теории. Аксиоматизация рациональных чисел с отношением порядка (полнота без доказательства), независимость аксиом.
8. Логические теории и их модели. Семантическое следование. Совместные и семантически полные теории. Аксиоматизация натуральных чисел с функцией перехода к следующему (полнота без доказательства), независимость аксиом.
9. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов ИП. Вывод из замкнутых гипотез (= дополнительных аксиом). Теорема корректности (без аккуратного доказательства общезначимости двух аксиом).
10. Выводы формул $\exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$, $\neg \forall x \varphi \leftrightarrow \exists x \neg \varphi$, $\neg \exists x \varphi \leftrightarrow \forall x \neg \varphi$.
11. Производные правила: правило обобщения, $\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\forall x \varphi \leftrightarrow \forall x \psi}$, $\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\exists x \varphi \leftrightarrow \exists x \psi}$, $\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{(\varphi \wedge \eta) \leftrightarrow (\psi \wedge \eta)}$, $\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\neg \varphi \leftrightarrow \neg \psi}$, ... Семантически эквивалентные и выводимо эквивалентные формулы.
12. Лемма о дедукции для ИП.
13. Аксиомы равенства и исчисление предикатов с равенством. Теорема Геделя о полноте (без доказательства). Теорема Геделя о полноте для нормальных моделей с доказательством (точнее, с выводом из теоремы Геделя для ИП без равенства).
14. Первые пять аксиом теории множеств ZFC: объемности, пустого множества, регулярности, объединения, неупорядоченной пары. Примеры моделей этих аксиом. Существование объединения двух множеств.
15. Упорядоченные пары по Куратовскому. Основное свойство упорядоченных пар: они совпадают титтк их первые компоненты совпадают и вторые компоненты совпадают. Отношения и функции.
16. Аксиома степени. Аксиома выделения. Пересечение и разность множеств (доказательство существования). Декартово произведение и его существование. Определение функций формулами. Существование области определения функции
17. Аксиома замены и ее использование для определения функций. Аксиома выбора.
18. Индуктивные множества. Натуральные числа. Доказательство аксиом Пеано. Аксиома бесконечности и существование множества натуральных чисел. Принадлежность, как линейный порядок на натуральных числах.

19. Общие теоремы о рекурсивных определениях. Рекурсивные определения сложения, умножения и возведения в степень на натуральных числах.
20. Вполне упорядоченные множества и ординалы. Теорема о минимальном ординале. Теорема о сравнимости ординалов.
21. Трансфинитная индукция. Трансфинитная рекурсия.
22. Лемма Цорна.
23. Теорема Цермело .
24. Равномощные множества, конечные и счетные множества. Кардиналы. Неравномощность разных натуральных чисел друг другу и ω.
25. Теорема Кантора — Бернштейна.
26. Теорема о том, что бесконечный кардинал равномощен своему декартову квадрату.

Геометрия - 2 (наглядная геометрия)

1. Комбинаторные графы, их составные части, типы, свойства, лемма о рукопожатиях, задача Эйлера, критерий эйлеровости графа.
2. Комбинаторные графы, их составные части, типы, свойства, гамильтонов граф, теорема Дирака — достаточное условие гамильтоновости.
3. Определение топологии и топологического пространства, открытые и замкнутые множества, задание топологии через замкнутые множества, примеры топологий (антидискретная, дискретная, топология Зарисского, индуцированная).
4. Метрика и метрические пространства, изометричные отображения и изометрии, нормированные пространства и пространства со скалярным произведением, метрики, порожденные нормой и скалярным произведением, открытый и замкнутый шары, сферы, метрическая топология, примеры из математического анализа.
5. Сравнение топологий, более грубая и более тонкая топологии, окрестность точки топологического пространства, критерий совпадения двух топологий, эквивалентность метрик и совпадение соответствующих им топологий, эквивалентность норм и соответствующих им метрик.
6. База топологии, индуцированная база, критерий совпадения топологий в терминах баз, эквивалентность евклидовой нормы и max-нормы на $\mathbb{R}^n$.
7. Хаусдорфовы топологические пространства, последовательности, их сходимость и пределы, теорема о пределе сходящейся последовательности в хаусдорфовом пространстве, сходимость в дискретном и антидискретном пространствах, сходимость в метрическом пространстве, примеры из математического анализа.
8. Непрерывные и разрывные в точке отображения топологических пространств, непрерывность в точке отображения метрических пространств, непрерывность отображения через непрерывность в точке, а также через замкнутые и открытые множества, эквивалентность трех определений непрерывности, база окрестностей точки, непрерывность в терминах баз и баз окрестностей.

9. Локальная ограниченность непрерывного отображения в метрическое пространство, проколотая окрестность, критерий Коши существования предела.
10. Липшицево отображение, константа Липшица, равномерная непрерывность, непрерывность ограничения и продолжения непрерывного отображения, непрерывность по направлениям функции на евклидовом пространстве и связь с непрерывностью.
11. Гомеоморфизм, гомеоморфные топологические пространства, метризация топологического пространства, примеры, гомеоморфность ограничения.
12. Кривые в топологическом пространстве, задание отрезка в нормированном пространстве в виде кривой, склейка кривых, непрерывность склейки, стыковка кривых, замена параметра, склейка стыкующихся кривых, ломаная в нормированном пространстве как кривая.
13. Структура подмножеств топологического пространства, точки прикосновения и замыкание, замыкание как наименьшее замкнутое надмножество, внутренние точки и внутренность, внутренность как наибольшее открытое подмножество, граничные точки и граница, формулы, связывающие границу, замыкание и внутренность.
14. Топология дизъюнктного объединения, топология декартово произведения, совпадение стандартной топологии $\mathbb{R}^n$ и топологии декартова произведения, канонические проекции из декартова произведения, координатные отображения для отображения в декартово произведение, непрерывность в терминах координатных отображений.
15. Кривые в $\mathbb{R}^n$ и непрерывность их координатных функций, поверхности в $\mathbb{R}^n$, полярные координаты, стереографическая проекция и доказательство гомеоморфности сферы с выколотой точкой и плоскости.
16. Открытое покрытие, компактное пространство или компакт, примеры компактных и некомпактных пространств, принцип Кантора о вложенных отрезках, компактность отрезка и кирпича, формулировка теоремы Тихонова.
17. Равномерно непрерывные отображения метрических пространств, теорема о равномерной непрерывности отображения из компактного метрического пространства.
18. Ограниченные и неограниченные метрические пространства, диаметр метрического пространства, ограниченность метрического компакта, компактность непрерывного образа компакта, компактность замкнутого подмножества компакта, замкнутость компактного подмножества хаусдорфова пространства.
19. Замкнутость и ограниченность компактного подмножества метрического пространства, критерий компактности подмножеств $\mathbb{R}^n$, компактность образа кривой, замкнутость и ограниченность образа кривой в метрическом пространстве, теорема о непрерывной функции на компакте, положительность расстояния от точки вне кривой до кривой.
20. Достаточное условие гомеоморфности непрерывной биекции, доказательство гомеоморфности замкнутой полуокружности и отрезка, доказательство гомеоморфности кольца и цилиндра.
21. Вполне ограниченное метрическое пространство, полные метрические пространства, принцип вложенных шаров, критерий полноты подмножества полного пространства, формулировка критерия компактности метрического пространства, секвенциальная

компактность, связь между компактностью и секвенциальной компактностью (формулировки).

22. Связные и несвязные топологические пространства, связные и несвязные подмножества топологических пространств, связность отрезка.
23. Факторизация, фактор-топология как самая сильная среди оставляющих отображение непрерывным, фактор-пространство. Построение факторпространства через разбиение, сюръективное отображение и эквивалентность. Открытые и замкнутые отображения и их связь с факторизацией.
24. Гомеоморфность фактор-пространства и сюръективного образа непрерывного отображения из компакта в хаусдорфово пространство, склейка в точку, склейка концов отрезка, склейка в точку границы шара, склейка пространств по отображению, склейка границ двух шаров.
25. Связность объединения пересекающихся связных множеств, связная компонента точки, разбиение пространства на связные компоненты, связность замыкания связного множества, замкнутость связных компонент.
26. Связность непрерывного образа связного пространства, связность декартова произведения связных пространств.
27. Линейно связные пространства, линейно связные компоненты, соотношение между связностью и линейной связностью.
28. Связность и линейная связность выпуклых подмножеств нормированных пространств, связные подмножества прямой, теорема о промежуточном значении непрерывной функции.
29. Локально линейно связные пространства, эквивалентность связности и линейной связности в локально линейно связных пространствах.
30. Локально постоянное отображение, непрерывность локально постоянного отображения, постоянство локально постоянного отображения на компонентах связности.
31. Замкнутые и незамкнутые кривые, вложенная кривая (незамкнутая и замкнутая), теорема Жордана о вложенной кривой на плоскости (формулировка), верен ли аналог теоремы Жордана на сфере, цилиндре, торе и листе Мёбиуса?
32. Замкнутые и незамкнутые ломаные, ломаная как простой граф, концевые (граничные) и внутренние вершины незамкнутой ломаной, внутренние вершины замкнутой ломаной, выкидывание ребра и выкидывание вершины из простого графа, выкидывание ребра и выкидывание вершины из ломаной, ломаная как кривая, ломаная как подмножество объемлющего пространства, концевая (граничная) и внутренняя точка ломаной, невырожденные ребра ломаной, вложенная ломаная (замкнутая и незамкнутая).
33. Теорема Жордана для вложенных ломаных на плоскости, стратегия доказательства теоремы Жордана для ломаных.
34. Доказательство того, что незамкнутая вложенная ломаная на плоскости не разбивает плоскость.
35. Доказательство того, что замкнутая вложенная ломаная на плоскости разбивает плоскость не более чем на две компоненты.

36. Доказательство того, что замкнутая вложенная ломаная на плоскости разбивает плоскость не менее чем на две компоненты.
37. Лемма о четырех точках на плоской замкнутой вложенной ломаной.
38. Геометрический граф в топологическом пространстве, вложенный геометрический граф, комбинаторная структура геометрического графа, отображение графов, изоморфизм графов, реализация комбинаторного графа в топологическом пространстве.
39. Плоские геометрические графы, планарные и непланарные комбинаторные графы, полный двудольный граф, доказательство непланарности графа $K_{3,3}$.
40. Грань плоского графа, лес, подграф, связная компонента графа, объединение, несвязное объединение и пересечение комбинаторных графов, разложение комбинаторного графа на связные компоненты, линейная связность дополнения плоского леса.
41. Формула Эйлера для плоских графов (с доказательством для графов, в которых ребра — ломаные).
42. Топологический граф, его множество вершин и ребер, сеть, вершины и ребра сети, погруженная сеть, связь между погруженными сетями и геометрическими графами, вложенная сеть, связь между вложенными сетями и вложенными геометрическими графами, эквивалентность вложенности геометрического графа и вложенности сети в хаусдорфовом топологическом пространстве.
43. Подразбиение ребер комбинаторного графа, гомеоморфные комбинаторные графы, формулировка теоремы Понтрягин–Куратовского (критерия планарности графа), классификация планарных полных и полных двудольных графов.
44. Плоский многоугольник, пространственный многоугольник, многогранная поверхность, элементы многогранной поверхности, замкнутые многогранные поверхности.
45. Формулировка теоремы Жордана для замкнутой многогранной поверхности, многогранник, ограниченный замкнутой многогранной поверхностью, внутренность, внешность и граница многогранника, граф и двойственный граф многогранной поверхности.
46. Выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, выпуклый многоугольник, выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^3$, теорема о представлении выпуклого многогранника из $\mathbb{R}^3$ в виде пересечения замкнутых полупространств.
47. Грани выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$, доказательство того, что эти грани — выпуклые пространственные многоугольники.
48. Геометрическая реализация графа многогранной поверхности в $\mathbb{R}^3$ с выпуклыми гранями, планарность графа и двойственного графа выпуклого многогранника, формула Эйлера для выпуклых многогранников.
49. Правильный многогранник в $\mathbb{R}^3$, классификация правильных многогранников в $\mathbb{R}^3$, платоновы тела.
50. Ёж выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$, теорема о свойствах ежа, формулировка теоремы Минковского о еже.
51. Аффинная и выпуклая комбинации, аффинная и выпуклая оболочки, аффинная независимость, k- мерный симплекс, его вершины, грани, гиперграни, относительная

внутренность и относительная граница. Триангуляция симплекса, ее грани, вершины, гиперграни, внутренние и граничные грани.

52. Раскраска вершин триангуляции симплекса, шпернеровская раскраска, всецветные симплексы, лемма Шпернера.
53. Диаметр подмножества метрического пространства, диаметр триангуляции, центр симплекса, барицентрическое подразбиение симплекса, кратное барицентрическое подразбиение, стандартный n-мерный симплекс, неподвижная точка отображения, теорема Брауэра о неподвижной точке.
54. Площади и объемы, их инвариантность и аддитивность, разрезание многоугольников, равносоставленные многоугольники, равновеликие многоугольники, теорема Бойяи–Валласа–Гервина.
55. Разрезание многогранников, равносоставленные многогранники, равновеликие многогранники, третья проблема Гильберта, зависимость на множестве вещественных чисел, аддитивная функция, функция Дена многогранника, инвариант Дена, формулировка теоремы Дена, примеры вычисления инвариантов Дена.
56. Доказательство теоремы Дена, равнодополняемые многогранники, решение Третьей проблемы Гильберта, формулировка теоремы Дена–Сидлера.
57. Склейка симплексов по ребрам, триангулированное пространство, топологический симплекс, вершины, ребра и параметризация топологического симплекса, триангуляция пространства, вершины, ребра, граф триангуляции, подразбиение триангуляции.
58. Правильная склейка симплексов по ребрам, правильная триангуляция, триангулированная поверхность (или, короче, поверхность), смежные симплексы поверхности, граничные и внутренние ребра поверхности, граница или край поверхности, устройство компонент границы, замкнутые поверхности.
59. Ориентация ребра, ориентация двумерного симплекса, согласованность ориентаций ребер, ориентация трехмерного симплекса, согласованность ориентаций двумерных граничных симплексов, ориентация поверхности, ориентируемые и неориентируемые поверхности.
60. Склейка ребер, склейки из квадрата, склейка поверхностей, частный случай такой склейки по соответствующим ориентированным граничным окружностям, вырезание дырки, вырезание дырки из симплекса, заклейка дырки.
61. Разрезание поверхности по внутренним ребрам, разрезание вдоль кривой, полоска вдоль кривой, вырезание полоски, вклейка в поверхность ручки и пленки Мёбиуса, альтернативное представление вклейки пленки Мёбиуса.
62. Классификация ориентированных поверхностей, эйлерова характеристика поверхности.
63. Классификация неориентированных поверхностей, эйлерова характеристика поверхности.
64. Дифференцируемая и гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$, ломаная в метрическом пространстве, длина ломаной, длина кривой в метрическом пространстве, независимость длины

от параметризации, спрямляемые кривые, липшицевы отображения, константа Липшица, растяжение, спрямляемость липшицевой кривой, обобщенное неравенство треугольника.

65. Натуральная и равномерная параметризация кривой, скорость равномерной параметризации, вырожденные и невырожденные кривые, безостановочные кривые, существование равномерного и натурального параметров на безостановочной кривой.
66. Кривые в арифметическом пространстве, их координатная запись, гладкие кривые, вектор скорости гладкой кривой, возможность гладкой параметризации угла, особые и регулярные точки гладкой кривой, регулярные кривые.
67. Интегральная формула длины гладкой кривой в евклидовом пространстве, задание натурального параметра с помощью интегральной формулы, критерий того, что параметр регулярной кривой — натуральный, описание всех замен параметра, сохраняющих натуральность.
68. Ориентация конечномерного пространства, стандартная ориентация $\mathbb{R}^n$, k-параллелепипед, вырожденный и невырожденный параллелепипед, объем параллелепипеда, ориентированный объем параллелепипеда, основание и высота параллелепипеда, ортогонализация Грама–Шмидта.
69. p-регулярные кривые, бирегулярные кривые, базис Френе для $(n-1)$-регулярной кривой в $\mathbb{R}^n$, формулы Френе (без доказательства).
70. Формулы Френе кривой в $\mathbb{R}^n$ (с доказательством).
71. p-ая кривизна кривой в $\mathbb{R}^n$, кривизны кривой в $\mathbb{R}^n$ в произвольной параметризации, сохранение кривизн при аффинных преобразованиях, выражение кривизн через коэффициенты ортогонализации.
72. Кривые на плоскости: кривизна и ориентированная кривизна, главная нормаль, ориентированные и неориентированные формулы Френе. Кривые в трехмерном пространстве: главная нормаль и бинормаль, кривизна и кручение, формулы Френе.
73. Вывод стандартных формул кривизны и ориентированной кривизны плоских кривых, а также кривизны и кручения кривых в трехмерном пространстве из общих формул Френе.
74. Зависящее от времени векторное поле, интегральная траектория, начальное условие, обыкновенное дифференциальное уравнение, теорема существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения, линейное дифференциальное уравнение, теорема о продолжении решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения.
75. Восстановление кривой по кривизнам, натуральные уравнения.
76. Восстановление плоской кривой по ориентированной кривизне, классификация плоских кривых постоянной кривизны.
77. Геометрия плоских кривых: радиус кривизны, ориентированный радиус кривизны, центр кривизны, эволюта или каустика, особенности эволюты, эвольвента, восстановление исходной кривой из ее эволюты.
78. Порядок касания кривых, окружность кривизны или соприкасающаяся окружность, порядок касания кривой и окружности кривизны.

Курс II, осень

Математический анализ

1. Теорема об обратной функции и замена координат.
2. Теорема о неявной функции. Гладкие поверхности.
3. Локальный условного экстремум. Метод множителей Лагранжа.
4. Кратный интеграл Римана по брусу и его свойства. Интегрируемость индикатора бруска.
5. Приближение ступенчатыми функциями. Критерий интегрируемости.
6. Теорема Фубини для интеграла по брусу. Формула интегрирования по частям.
7. Множества меры нуль по Лебегу и их свойства. График непрерывной функции является множеством меры нуль. Критерий Лебега (формулировка). Интегрируемость композиции непрерывной и интегрируемой функций.
8. Интеграл Римана по множеству. Корректность определения. Мера Жордана. Свойства интеграла Римана по множеству.
9. Изменение объёма допустимого множества при невырожденном аффинном отображении. Формула замены переменных в кратном интеграле Римана.
10. Несобственный интеграл Римана. Сходимость интеграла от неотрицательной функции.
11. Спрямляемые кривые. Длина кривой: аддитивность, непрерывность, инвариантность относительно допустимых замен параметра. Формула для вычисления длины гладкой кривой.
12. Пример Шварца. Определение k-мерной поверхностной меры σ_k. Мера допустимого множества нааффинной плоскости, заданной отображением $L(x) = Ax + b$. Формула для вычисления σ_k на k-мерной гладкой поверхности в $\mathbb{R}^{k+1}$.
13. Определение и свойства интеграла по σ_k. Сведение к интегралу Римана поверхностного интеграла по гладкой k-мерной поверхности в $\mathbb{R}^{k+1}$
14. Регулярная точка границы компакта. Внешняя нормаль в регулярной точке. Формула интегрирования по частям для непрерывно дифференцируемой функции на компакте, почти все точки границы которого регулярные. Формула Гаусса–Остроградского и формула Грина.
15. Работа векторного поля вдоль кусочно-гладкой кривой, зависимость от параметризации кривой, формула Ньютона–Лейбница. Критерий потенциальности векторного поля.
16. Поток векторного поля через гладкую элементарную поверхность, зависимость от параметризации поверхности.
17. Дифференциальные формы. Внешнее умножение и его свойства. Внешнее дифференцирование форм и его свойства. Лемма Пуанкаре.
18. Перенос дифференциальной формы и его свойства, равенство $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$.
19. Интегрирование дифференциальных форм по сингулярным цепям. Теорема Стокса.
20. Гладкое многообразие и гладкие функции на многообразии.

21. Касательное пространство. Дифференциал гладкой функции на многообразии.
22. Дифференциальные формы на многообразии.
23. Ориентируемые многообразия. Существование ориентирующего атласа и существование всюду отличной от нуля дифференциальной формы. Лист Мёбиуса.
24. Многообразие с краем. Край — гладкое многообразие. Согласованная ориентация края.
25. Интегрирование дифференциальных форм по многообразию. Теорема Стокса для форм на гладком многообразии с краем.

Алгебра - 3

1. Группы. Гомоморфизмы групп. Ядро и образ гомоморфизма. Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы. Ядро эффективности действия. Действие группы на себе левыми и правыми сдвигами. Левые и правые смежные классы. Представление группы в виде объединения смежных классов. Связь орбиты и стабилизатора. Теорема Лагранжа. Теорема Кэли.
2. Действие группы на себе сопряжениями. Классы сопряжённости. Централизатор элемента и центр группы. Внутренние автоморфизмы группы. Действие группы сопряжениями на множестве своих подгрупп. Сопряжённые подгруппы, нормальные группы и нормализатор подгруппы. Левые и правые смежные классы для нормальной подгруппы. Нормальность подгруппы индекса 2.
3. Нормальность ядра гомоморфизма и ядра эффективности действия группы на множестве. Факторгруппы. Теорема о гомоморфизме групп. Образ подгруппы в факторгруппе.
4. Внешнее и внутреннее прямое произведение групп. Эквивалентность этих констукций. Критерий того, что группа является прямым произведением двух своих подгрупп. Разложение циклических групп в прямое произведение. Факторизация прямого произведения по сомножителям.
5. Абелевы группы. Линейно зависимые элементы и базисы в абелевых группах. Свободные абелевы группы. Ранг конечно порождённой свободной абелевой группы. Подгруппы в свободной конечно порождённой группе. Представление любой абелевой группы, как факторгруппы свободной группы по её подгруппе.
6. Целочисленные матрицы и целочисленные элементарные преобразования строк и столбцов. Приведение целочисленной матрицы к диагональному виду. Теорема о согласованных базисах. Существование разложения конечно порождённой абелевой группы в прямую сумму циклических.
7. Периодическая часть $\mathrm{Tor}(A)$ абелевой группы и p-примарная часть $\mathrm{Tor}_p(A)$ абелевой группы. Единственность разложения конечно порождённой абелевой группы в прямую сумму циклических. Следствия (критерий свободности абелевой группы в терминах кручения, существование подгруппы заданного порядка в конечной абелевой группе, каноническое разложение конечной абелевой группы в прямую сумму циклических). Показатель группы. Существование элемента порядка $exp(A)$ в конечной абелевой группе.

8. Дискретные подгруппы в $\mathbb{R}^n$. Их свойства. Ранг дискретной подгруппы в $\mathbb{R}^n$.
9. Определение p-группы. Центр p-группы. Нормальные подгруппы заданного порядка в p-группах. Группы порядка p^2.
10. Первая теорема Силова. Следствие (p-подгруппы в конечной группе).
11. Вторая теорема Силова. Следствия (изоморфизм силовских p-подгрупп, связь индекса силовской p-группы с количеством таких групп, нормальность силовской p-группы).
12. Третья теорема Силова. Силовские подгруппы в группах порядка pq.
13. Коммутант. Образ коммутанта при гомоморфизме. Нормальность коммутанта. Фактор группы по её коммутанту. Критерий абелевости фактора группы по её нормальной подгруппе.
14. Разрешимые группы. Разрешимость диэдральных групп, p-групп и групп порядка pq. Критерий разрешимости группы (через нормальную подгруппу и фактор). Разрешимость группы верхнетреугольных матриц.
15. Образующие в группах S_n и A_n. Неразрешимость групп S_n и A_n при $n > 4$.
16. Образующие в группах $GL_n(\Bbbk)$ и $SL_n(\Bbbk)$. Неразрешимость групп $GL_n(\Bbbk)$ и $SL_n(\Bbbk)$ при $n > 1$ и $|\Bbbk| > 3$.
17. Внешнее и внутреннее полупрямое произведение групп. Эквивалентность этих конструкций.
18. Простые группы. Композиционный ряд. Критерий разрешимости группы (через композиционный ряд). Простота A_n.
19. Простота группы $PSL_2(\Bbbk)$ при $|\Bbbk| > 3$.
20. Образующие в группе $O_n(\mathbb{R})$. Простота группы $SO_3(\mathbb{R})$.
21. Кольца. Идеалы. Гомоморфизмы колец. Конструкция факторкольца. Теорема о гомоморфизме колец. Простота кольца матриц над полем.
22. Модули над кольцами. Гомоморфизмы модулей. Конструкция фактормодуля. Теорема о гомоморфизме модулей. Прямые суммы колец и модулей.
23. Коммутативные кольца. Простые и максимальные идеалы. Факторкольца по простым и максимальным идеалам. Существование максимального идеала.
24. Кольца главных идеалов. Факториальные кольца. Факториальность кольца главных идеалов. Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.
25. Модули над кольцами главных идеалов. Подмодуль кручения и p-периодическая часть модуля. Конечно порождённый модуль без кручения над кольцом главных идеалов является свободным.
26. Структура конечно порождённых модулей над кольцами главных идеалов. Следствия (строение конечно-порождённых абелевых групп, теорема о жордановой нормальной форме).
27. Китайская теорема об остатках (для коммутативных ассоциативных колец с единицей). Следствия.
28. Расширения полей. Простые поля. Алгебраические расширения полей. Теорема о башне полей. Минимальный многочлен алгебраического элемента.

29. Целые расширения колец. Целозамкнутые кольца. Целозамкнутость факториальных колец. Целое замыкание подкольца.
30. Присоединение корня неприводимого многочлена к полю.
31. Поле разложения многочлена.
32. Алгебраическое замыкание поля.
33. Отображение Фробениуса. Строение конечных полей. Подполя в конечных полях. Примитивный элемент для конечных полей. Автоморфизмы конечных полей.
34. Сепарабельные расширения полей. Чисто несепарабельные элементы.
35. Сепарабельное замыкание подполя в поле.
36. Совершенные поля. Алгебраические расширения совершенных полей. Теорема о примитивном элементе.
37. Продолжение автоморфизмов расширений. Единственность алгебраического замыкания поля.
38. Нормальные расширения полей. Автоморфизмы расширений полей.
39. Расширения Галуа. Расширение Галуа нормально и сепарабельно. Группа Галуа.
40. Основная теорема теории Галуа.

Комплексный анализ

1. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма. Возведение в степень и извлечение корней. Определение и простейшие свойства функции e^z.
2. Одноточечная компактификация комплексной плоскости. Сферическая метрика на $\mathbb{C}^\infty$. Стереографическая проекция и ее основные свойства.
3. Связность и линейная связность множеств, компоненты связности, пути и кривые, теорема Жордана. Односвязные области. Оболочка компакта, свойство оболочки компакта, лежащего в односвязной области.
4. Действие функций e^z и $z^n, n \in \mathbb{N}$. Многозначный логарифм и его однозначные ветви в $\Omega_\alpha = \mathbb{C} \setminus e^{\alpha R_+}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Многозначная функция $\sqrt[n]{z}$ и ее однозначные ветви в Ω_α.
5. $\mathbb{R}$- и $\mathbb{C}$-дифференцируемость функций комплексного переменного. Дифференциальные операторы $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial \bar{z}$. Условия Коши–Римана. Голоморфность функции в точке и в области.
6. Комплексная производная и ее основные свойства. Утверждения о производной сложной и обратной функций. Производные функций e^z , z^n, однозначных ветвей корня и логарифма.
7. Производная по направлению, ее выражение через $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial \bar{z}$. Якобиан отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определяемого данной функцией комплексного переменного. Геометрический смысл комплексной производной (ее модуля и аргумента). Конформность отображений в точке и в области.

8. Дробно-линейные функции. Их конформность в $\mathbb{C}_\infty$. Сохранение углов между гладкими кривыми при ДЛО. Геометрические свойства ДЛО (круговое свойство, сохранение симметрии относительно обобщенных окружностей).
9. Свойство сохранения сложного отношения при ДЛО и построение ДЛО по «трем точкам».Групповое свойство ДЛО. Вычисление групп дробно-линейных автоморфизмов единичного круга, плоскости $\mathbb{C}$ и верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$.
10. ФункцияЖуковскогоитригонометрическиефункциикомплексногопеременного.Их (максимальные) области конформности и образы этих областей.
11. Степенные ряды. Круг сходимости степенного ряда (первая теорема Абеля). Формула Коши–Адамара. Голоморфность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Функции, локально представимые степенными рядами в областях в $\mathbb{C}$, и их бесконечная дифференцируемость.
12. Интеграл от функции комплексного переменного вдоль пути/кривой и его свойства. Интегрируемость непрерывной функции по спрямляемому пути/кривой. Формула для вычисления интеграла по кусочно-гладкому пути.
13. Понятие комплексной первообразной. Критерий существования комплексной первообразной в области. Формула Ньютона–Лейбница.
14. Лемма Гурса (в обычной и усиленной форме).
15. Интегральная теорема Коши для выпуклой области (для функций, голоморфных в области D и для функций класса $C(\overline{D}) \cap H(D \setminus \{a\})$ $a \in D$). Интегральная формула Коши в круге.
16. Локальное представление голоморфных функций степенными рядами. Ряды Тейлора. Формулы для коэффициентов Тейлора голоморфной функции. Единственность разложения голоморфной функции в ряд Тейлора.
17. Неравенства Коши для коэффициентов Тейлора. Теорема Лиувилля. Теорема Мореры.
18. Лемма о среднем для голоморфных функций. Принцип максимума модуля.
19. Приращение аргумента вдоль пути/кривой. Индекс кривой относительно точки, и его свойства.
20. Интегральная теорема Коши и интегральная формула Коши для циклов, гомологичных нулю.
21. Критерий односвязности области в терминах циклов, гомологичных нулю. Интегральная теорема Коши для односвязной области. Жордановы области и их ориентированные границы. Допустимые области и интегральная теорема Коши для них. Существование голоморфных ветвей корня и логарифма в односвязных областях в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
22. Понятие гомотопии путей и кривых, ее простейшие свойства. Интегральная теорема Коши для гомотопных путей. Интегральная теорема Коши для допустимых областей D и для функций класса $C(\overline{D}) \cap H(D)$ — схема доказательства.
23. Интегральная формула Коши для производных, теорема Вейерштрасса о локально-равномерно сходящейся последовательности голоморфных функций.
24. Нули голоморфных функций. Теорема единственности.

25. Особые точки суммы степенного ряда на границе круга сходимости. Теорема Принсгейма.
26. Ряды Лорана (разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана, формулы для коэффициентов ряда Лорана, неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана).
27. Изолированные особые точки однозначного характера голоморфных функций и их классификация. Описание устранимых особых точек. Описание полюсов, понятие порядка полюса.
28. Изолированные особые точки однозначного характера голоморфных функций и их классификация. Теорема Сохоцкого. Бесконечность как особая точка.
29. Вычеты. Теорема Коши о вычетах и утверждение о полной сумме вычетов. Связь вычетов и коэффициентов ряда Лорана, формулы вычисления вычетов в полюсах, формула для вычета в бесконечности.
30. Понятие интеграла в смысле главного значения (для интегралов от функций комплексного переменного по путям/кривым). Вычет в точке относительно области. Теорема Коши о вычетах для интегралов в смысле главного значения.
31. Свойства вычета относительно области: формула вычета относительно области в полюсе первого порядка; лемма Жордана; вычеты относительно области в точке a, если $f = o(1/(z?a))$ при $a \in \mathbb{C}$ и $f = o(1/z)$ при $a = \infty$.
32. Логарифмический вычет и его свойства. Вычисление интеграла $\in f?/f\,dz$ по спрямляемой кривой Γ от функции f, голоморфной в окрестности $\Gamma^?$ и $f \neq 0$ на $\Gamma^?$. Принцип аргумента.
33. Теорема Руше. Принцип сохранения области.
34. Лемма Шварца и ее обобщения. Общий вид конформных отображений единичного круга на себя. Характеристическое свойство конечных произведений Бляшке.
35. Лемма Бореля–Каратеодори. Малая теорема Пикара и ее доказательство для целых функций класса $\mathcal{E}_\infty$.
36. Однолистные функции. Критерий локальной однолистности.
37. Обратный принцип соответствия границ и однолистность голоморфной в выпуклой области функции с условием $\mathrm{Re} f? > 0$.
38. Достаточное условие однолистности голоморфной непостоянной в данной области D функции f с условием $f(z) \to \Gamma$ при $z \to \partial D$, где Γ — замкнутая жорданова кривая.
39. Принцип симметрии Римана–Шварца
40. Теорема площадей для однолистных функций. Теорема Кёбе об $1/4$.
41. Теорема Гурвица о нулях и теорема о локально равномерно сходящейся последовательности однолистных функций.
42. Локальная равномерная ограниченность и локальная равностепенная непрерывность семейств функций. Связь этих понятий для семейств голоморфных функций.
43. Понятие компактности семейства голоморфных функций. Теорема Монтеля. Лемма о верхней грани модуля непрерывного функционала на компактном семействе функций.

44. Теорема Римана и ее доказательство (схема доказательства и подробное проведение одного из двух рассуждений — существование однолистной функции, отображающей данную область в единичный круг, или обоснование того факта, что экстремальная функция функционала $f \to f?(a)$ отображает данную область на весь единичный круг).
45. Теоремы Каратеодори о непрерывном и гомеоморфном продолжении конформного отображения: необходимые понятия, определения и формулировки; подробные схемы доказательств.
46. Элементы и их аналитическое продолжение. Аналитическое продолжение по цепочке и вдоль пути, их основные свойства.
47. Аналитическое продолжение по близким путям. Теорема об аналитическом продолжении по гомотопным путям. Теорема о монодромии.
48. Полная аналитическая функция в смысле Вейерштрасса (П.А.Ф.). Теорема Пуакаре–Вольтерра. Аналитические ветви П.А.Ф. и голоморфные ветви П.А.Ф. Особые точки (аналитических ветвей) П.А.Ф. и их классификация.
49. Теоремы об аналитическом продолжении первообразного элемента и сложного элемента. Примеры их применения.
50. Модулярная функция. Доказательство малой теоремы Пикара в общем случае.

Геометрия - 3

1. Поверхности в евклидовом пространстве. Касательные векторы и касательное пространство.
2. Первая фундаментальная форма поверхности. Длины и углы.
3. Гладкие отображения поверхностей. Дифференциал гладкого отображения. Изометрии поверхностей.
4. Векторные поля на поверхности. Ковариантное дифференцирование. Вычисление символов Кристоффеля.
5. Параллельный перенос касательных векторов и его свойства.
6. Геодезические и их простейшие свойства.
7. Экспоненциальное отображение и его свойства. Нормальные координаты.
8. Геодезические сферы. Лемма Гаусса.
9. Геодезические как локально кратчайшие.
10. Теорема Хопфа — Ринова.
11. Тензорные поля на поверхностях. Полилинейные и F-линейные отображения.
12. Коммутатор векторных полей и его свойства.
13. Оператор кривизны и тензор Римана. Координатные формулы.
14. Симметрии тензора Римана. Тензор Риччи и скалярная кривизна.
15. Топологические многообразия. Карты, атласы, функции склейки.
16. Гладкие структуры. Гладкие многообразия. Гладкие функции и гладкие отображения многообразий.

17. Касательный вектор к многообразию. Касательное пространство.
18. Касательное расслоение. Векторные расслоения. Примеры.
19. Дифференциал гладкого отображения многообразий. Вложения и погружения.
20. Теорема о вложимости компактного многообразия в евклидово пространство.
21. Риманова метрика на многообразии. Аффинная связность. Символы Кристоффеля.
22. Симметричные связности. Тензор кручения.
23. Римановы связности. Теорема существования и единственности.
24. Ковариантное дифференцирование тензорных полей произвольного ранга.
25. Параллельный перенос, геодезические, экспоненциальное отображение, минимальность геодезических, теорема Хопфа-Ринова для многообразий.
26. Линейные связности в векторных расслоениях. Символы Кристоффеля. Оператор кривизны.
27. Вложенные подмногообразия римановых многообразий. Касательное и нормальное расслоения. 28. Деривационные формулы Гаусса — Вейнгартена. Вторая фундаментальная форма. Оператор Вейнгартена.
28. Свойства второй квадратичной формы: ускорение геодезических, кривизны нормальных сечений подмногообразий евклидова пространства, теорема Менье на гиперповерхности.
29. Свойства второй квадратичной формы гиперповерхности: отклонение точки от касательной плоскости, главные кривизны и главные направления, формула Эйлера, гауссова и средняя кривизны, эллиптические, гиперболические и параболические точки.
30. Уравнения Гаусса, Петерсона-Майнарди-Кодацци и Риччи.
31. Уравнения Гаусса и Петерсона-Майнарди-Кодацци для гиперповерхности. Связь скалярной кривизны со второй фундаментальной формой. Блистательная теорема Гаусса.
32. Теорема единственности гиперповерхности с заданными первой и второй фундаментальными формами.
33. Условие совместности системы дифференциальных уравнений. Теорема о разрешимости.
34. Теорема о восстановлении гиперповерхности по паре форм.
35. Пространства когомологий де Рама. Примеры. Поведение когомологий при гладких отображениях.
36. Гладко гомотопные отображения. Совпадение операторов в когомологиях для гомотопных отображений. Гомотопически эквивалентные многообразия. Когомологии евклидовых пространств. Лемма Пуанкаре.
37. Формы связности и формы кривизны в векторных расслоениях. Закон преобразования формы связности при замене координат. Структурные равенства Картана. Дифференциальное тождество Бьянки.
38. Инвариантные многочлены и их свойства.
39. Характеристические классы, соответствующие инвариантным многочленам. Классы Чженя и Понтрягина.

Дифференциальные уравнения - I

Первый семестр (теоремы существования и единственности + теория линейных систем).

1. Понятие дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений. Примеры дифференциальных уравнений и их решений. Метод разделения переменных.
2. Теорема Арцела–Асколи. Теорема о существовании решения. Пример неединственности решения.
3. Теорема о сжимающем отображении. Теорема о существовании и единственности решения.
4. Продолжаемость решений. Понятие о непродолжаемом решении. Неравенство Гронуолла–Беллмана. Достаточное условие продолжаемости решения на $\mathbb{R}$.
5. Однородные и неоднородные линейные системы уравнений. Конечномерность пространства решений линейных систем. Фундаментальная система решений. Метод вариации постоянных.
6. Формула Абеля–Лиувилля–Остроградского для определителя Вронского.
7. Формулы решений для линейных систем с постоянными коэффициентами.
8. Формулы решений для неоднородных линейных систем с постоянными коэффициентами и квазиполиномами в правой части.
9. Понятие потока автономной системы ОДУ. Экспонента матрицы. 1
10. Теорема Флоке–Ляпунова. Матрица монодромии и мультипликаторы.
11. Примеры приложений линейных систем к задачам механики: стабилизация вертикального положения маятника с вибрирующей точкой подвеса и задача Кеплера.
12. Классификация Пуанкаре особых точек на плоскости.
13. Теоремы о колеблемости решений.
14. Функция Грина краевой задачи.

Курс II, весна

Математический анализ

1. Алгебры и сигма-алгебры. Сигма-алгебра, порожденная набором множеств. Борелевская сигма-алгебра.
2. Меры. Необходимые и достаточные условия сигма-аддитивности. Компактные классы.
3. Борелевские меры. Борелевские меры на прямой и их функции распределения.
4. Теорема Каратеодори о внешней мере. Теорема Лебега о продолжении. Равносильные описа- ния измеримых множеств. Мера Лебега—Стилтьеса на прямой. Пример Витали.
5. Мера Лебега на $\mathbb{R}^n$. Измеримые по Лебегу множества. Сохранение измеримости при липшицевых отображениях. Изменение меры Лебега при аффинном отображении.

6. Мера Хаусдорфа и ее свойства. Измеримость борелевских множеств. Связь с мерой Лебега. Размерность Хаусдорфа.
7. Измеримые функции. Сохранение измеримости при подстановке в борелевскую функцию. Со- хранение измеримости при поточечном пределе.
8. Сходимость по мере и почти всюду. Лемма Бореля—Кантелли. Пример и теорема Рисса. Теорема Егорова. Теорема Лузина.
9. Интеграл Лебега от простых функций. Интеграл Лебега от неотрицательных функции.
10. Общее определение интеграла Лебега. Линейность, монотонность, аддитивность, неравенство Чебышёва, приближение простыми функциями.
11. Теорема Лебега. Теорема Беппо Леви. Лемма Фату. Непрерывность и дифференцируемость интеграла по параметру.
12. Связь интеграла Лебега и интеграла Римана. Критерий Лебега.
13. Неравенства Йенсена, Гёльдера и Минковского. Пространства L^p. Вид линейного непрерывного функционала на L^2..
14. Произведение сигма-алгебр и мер. Теорема Фубини. Теорема Тонелли.
15. Знакопеременные меры. Разложение Хана—Жордана. Вариация меры.
16. Теорема Радона—Никодима. Теорема Лебега о дифференцировании интеграла. Максимальная функция Харди. Покрытие Витали.
17. Абстрактная формула замены переменных. Замена переменных в интеграле по мере Лебега.
18. Свертка функций. Дельта-образная последовательность.
19. Эквивалентные определения абсолютно непрерывных функций. Соболевские производные.
20. Тригонометрические ряды Фурье в L^2. Поточечная сходимость тригонометрического ряда Фурье. Ядро Дирихле. Признак Дини. Связь гладкости функции и стремления к нулю коэффициентов Фурье.
21. Преобразование Фурье быстро убывающих функций. Преобразование Фурье функций из L^1

Алгебра - 4

1. Модули над ассоциативными кольцами и алгебрами (левые, правые, бимодули): определение, примеры (в том числе: векторные пространства = модули над полем, абелевы группы = модули над $\mathbb{Z}$, линейные представления группы = модули над групповой алгеброй, регулярный бимодуль).
2. Структура модуля над кольцом или алгеброй на абелевой группе или векторном пространстве M задаётся гомоморфизмом из A в кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}(M)$ или в алгебру линейных операторов $L(M)$. Подмодули и фактормодули.
3. Прямая сумма колец, алгебр и модулей, её универсальное свойство. Прямая сумма колец или алгебр как прямая сумма идеалов.

4. Тендерное произведение модулей, его простейшие свойства: тензорное умножение на регулярный модуль, дистрибутивность относительно прямых сумм, ассоциативность.
5. Полилинейные отображения модулей, универсальное свойство тензорного произведения по отношению к полилинейным отображениям.
6. Тензорное произведение векторных пространств, его базис и размерность. Расширение скаляров.
7. Тензорное произведение колец и алгебр. Система, порождающих модуля. Конечно порождённые, циклические, свободные модули.
8. Точные последовательности модулей и гомоморфизмов. Сохранение точности коротких последовательностей при применении функторов $\mathrm{Hom}(-, N)$, $\mathrm{Hom}(M, -)$. Канонический изоморфизм $\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) = \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$.
9. Сохранение точности справа коротких последовательностей при применении функтора $- \otimes N$. Критерий равенства нулю в тензорном произведении.
10. Нётеровы модули, условие обрыва возрастающих цепочек подмодулей. Модуль нётеров тогда, и только тогда, когда его подмодуль N и фактормодуль M/N нётеровы. Прямая сумма, модулей нётерова тогда и только тогда, когда нётеровы прямые слагаемые.
11. Нётеровы кольца и алгебры. Конечно порождённые модули над нётеровыми кольцами нётеровы. Факторкольца, нётеровых колец нётеровы. Теорема, Гильберта, о базисе идеала, нётеровость конечно порождённых колец и алгебр.
12. Линейные представления математических структур (множеств, векторных пространств, ассоциативных алгебр, групп, ...), их матричная реализация в конечномерном случае. Примеры представлений: на пространстве функций, левое регулярное представление, присоединенное представление. Инвариантные подпространства, подпредставления и факторпредставления. Прямая сумма линейных пред- ставлений. Приводимые, неприводимые и вполне приводимые представления. Примеры.
13. Подпредставление и фактор-представление вполне приводимого представления вполне приводимо (древнее предложение). Разложение вполне приводимого конечномерного представления в прямую сумму неприводимых представлений (древняя теорема).
14. Гомоморфизмы, эндоморфизмы и изоморфизмы линейных представлений. Лемма Шура о гомоморфизмах и эндоморфизмах неприводимых линейных представлений. Кратности неприводимых представлений в разложении вполне приводимого представления на неприводимые слагаемые и изотипные компоненты, их единственность и структура.
15. Инвариантные подпространства, изотипных представлений над алгебраически замкнутым полем. Теорема Бернсайда-1 о подалгебре, порожденной образами неприводимого представления множества над алгебраически замкнутым полем.
16. Конечномерные ассоциативные алгебры, эквивалентность понятия линейного представления и модуля над алгеброй. Нильпотентные алгебры, радикал.
17. Стандартное скалярное умножение на конечномерной ассоциативной алгебре, его свойства, связь с радикалом. Радикал алгебры совпадает с пересечением ядер её

неприводимых представлений. Полупростые ассоциативные алгебры, пример: простые алгебры с ненулевым умножением, в частности, алгебры матриц над конечномерными алгебрами с делением.

18. Нильпотентные алгебры Ли: 3 эквивалентных определения. Пример: нильпотентная алгебра, опера- торов, ассоциированная с флагом.
19. Теорема Энгеля о представлениях алгебры Ли, состоящих из нильпотентных операторов. Эквивалентная ей теорема, о собственном векторе с нулевым собственным значением. Нормализатор подалгебры Ли. Следствие: критерий нильпотентности алгебры Ли.
20. Разрешимые алгебры Ли: 3 эквивалентных определения. Пример: разрешимая алгебра, операторов, ассоциированная с флагом.
21. Теорема Ли о представлениях разрешимой алгебры Ли. Эквивалентная ей теорема о собственном векторе. Лемма, которая пригодится в будущем. Следствие о флаге из идеалов в разрешимой алгебре Ли.
22. Следствие: критерий разрешимости алгебры Ли над полем нулевой характеристики, конструкция расширения скаляров для алгебры Ли. Радикал алгебры Ли, полупростые алгебры Ли. Пример: радикал алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, полупростая алгебра Ли $\mathfrak{sl}(V)$ над полем характеристики 0.
23. Полупростые ассоциативные алгебры. Левое регулярное представление полупростой алгебры вполне приводимо. Разложение полупростой алгебры в прямую сумму простых алгебр.
24. В простой алгебре с ненулевым умножением есть 1. Теорема Бернсайда-2 об образе конечномерной ассоциативной алгебры при неприводимом представлении.
25. Теоремы Веддербёрна и Веддербёрна-Артина о структуре простых и полупростых конечномерных ассоциативных алгебр. Полная приводимость представлений полупростых алгебр.
26. Полупростота групповой алгебры конечной группы над полем нулевой или положительной характеристики, не делящей порядок группы. Приложения: теорема Машке о полной приводимости линейных представлений конечных групп, количество и сумма квадратов размерностей неприводимых представлений над алгебраически замкнутым полем.
27. Скалярное произведение на пространстве линейных функций, матричные элементы, характеры представлений конечных групп. Характеры неприводимых представлений образуют ортонормированный базис пространства центральных функций.
28. Представления множеств и алгебр Ли с точки зрения ассоциативных алгебр. Свободный моноид, свободная ассоциативная алгебра. Универсальная обёртывающая алгебры Ли. Эквивалентность ли- нейных представлений алгебры Ли и её универсальной обёртывающей алгебры.
29. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Пример универсальной обертывающей для коммутативной ал- гебры Ли. Ассоциированная градуированная алгебра.
30. Тензорное произведение представлений: тензорное произведение линейных операторов, тензорное произведение представлений групп, ассоциативных алгебр, алгебр Ли. Сопряженные представления групп, ассоциативных алгебр и алгебр Ли.

31. Тензорное произведение неприводимых представлений групп над алгебраически замкнутым полем. Тензорное произведение неприводимых представлений алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем.
32. Применения тензорных произведений представлений алгебр Ли: конструкция представления R_1R_2, инвариантная билинейная форма, (относительно представления ad^*ad^*. Гомоморфизмы g-модулей как инвариантные элементы пространства тензоров типа $(1,1)$, алгебра Ли дифференцирований $\mathrm{Der}(A)$ произвольной алгебры .
33. Полупростые операторы и их реплики. Критерий Картана разрешимости алгебры Ли.
34. Критерий Картана полупростоты алгебры Ли. Структура полупростых алгебр Ли. Простота алгебры Ли $\mathfrak{sl}(V)$.
35. Линейные группы Ли. Подгруппа в GL_n, являющаяся многообразием в окрестности какой-либо одной своей точки, является группой Ли. Примеры: SL_n, O_n, U_n. Линейная группа, Ли замкнута в GL_n. Компоненты связности группы Ли, связная компонента единицы. Связная группа Ли порождается любой окрестностью единицы.
36. Касательная алгебра Ли линейной группы Ли. Экспоненциальное отображение, его свойства.
37. Связная линейная группа Ли однозначно определяется своей касательной алгеброй Ли. Пересечение подгрупп Ли ? подгруппа Ли, её алгебра Ли. Примеры: SO_n, SU_n. Алгебра Ли коммутативной группы Ли коммутативна; для связных групп Ли верно обратное.
38. Линейные представления групп Ли. Дифференциал линейного представления группы Ли есть линеное представление её касательной алгебры Ли. Присоединённое представление группы Ли и алгебры Ли, связь между ними.
39. Двулистные накрытия $SU_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{R})$, $SL_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{C})$.
40. Связь между линейным представлением группы Ли и его дифференциалом посредством экспоненциального отображения. Эквивалентность теоретико-представленческих свойств (приводимость, неприводимость, полная приводимость) для линейных представлений связных групп Ли и соответствующих линейных представлений их касательных алгебр Ли.
41. Существование инвариантного скалярного умножения и полная приводимость линейных представлений компактных групп Ли. Линейные представления группы вращений плоскости и многочлены Фурье.
42. Вещественные формы комплексных групп Ли. Совпадение инвариантных подпространств у ком- плексной группы Ли и её вещественной формы в комплексном линейном представлении. Редуктивные группы Ли. Унитарный трюк Вейля: полная приводимость представлений редуктивных групп.
43. Описание неприводимых комплексных линейных представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ и групп Ли $SL_2(\mathbb{C})$, $SU_2(\mathbb{C})$, $SO_3(\mathbb{C})$, $SO_3(\mathbb{R})$.
44. Характеры, формула Клебша-Гордана.

Геометрия - 4

1. Топология на множестве. Упорядоченность множества топологий, сравнение топологий. Минимальная топология, порожденная семейством подмножеств. Понятие базы и предбазы; сепарабельность; примеры. Индуцированная топология.
2. Непрерывные отображения; открытые и замкнутые отображения, гомеоморфизмы. Основные способы задания топологий на множестве : a) с помощью семейства отображений в топологические пространства; b) с помощью семейства отображений топологических пространств в данное множество.
3. Основные топологические конструкции. Фактор-топология и фактор-пространство; стягивание в точку. Произведение пространств. Цилиндр, конус и надстройка. Операция приклеивания; цилиндр и конус отображения. Примеры.
4. Понятие связности; связность отрезка. Линейная связность; линейная связность влечет связность; примеры. Образ связного/линейно-связного пространства. Аксиомы отделимости; пример линейно-связного T0-пространства, состоящего из двух точек. Теорема о нормальности метрического пространства.
5. Компактность; компактность замкнутых подмножеств компактного пространства. Замкнутость образа компактного пространства в хаусдорфово пространство; компакт. Компактность метрических пространств.
6. Свойства прямого произведения с тихоновской топологией. Теорема Александера (без доказательства), теорема Тихонова. Гильбертов куб и его метризации. Пределы обратных спектров (последовательностей). Теорема об обратном спектре компактов. Кольцо целых p-адических чисел; p-адический соленоид.
7. Гомотопия, стягиваемость, ретракция, деформационная ретракция, гомотопическая эквивалентность.Топологии в пространстве отображений: компактно-открытая; топологии поточечной и равномерной сходимости.
8. Клеточные пространства, аксиомы (C) и (W); определения и примеры. Скелеты, клеточные отображения, приклеивание клеток. Клеточные разбиения поверхностей. Клеточные разбиения классических пространств : сферы и проективные пространства (вещественные и комплексные).
9. Основные топологические конструкции для клеточных пространств: произведение; стягивание в точку; приклеивание; цилиндр отображения; конус и надстройка.
10. Свойства продолжения гомотопии. Теорема Борсука и ее следствия. Существование клеточного пространства с одной вершиной и гомотопически эквивалентного данному клеточному пространству. Теорема о клеточной аппроксимации (без доказательства). Отображения S^k в S^n при $k < n$; n-связность. Существование гомотопически эквивалентного n-связному клеточному пространству клеточного пространства с одной вершиной и без клеток размерностей $1 \leq k \leq n$.
11. Пространство путей, естественные топологиизации и метризации. Композиция путей, ее свойства; гомотопическая ассоциативность. Петли, фундаментальная группа.
12. Вычисление фундаментальной группы окружности. Роль базисной точки. Фундаментальные группы клеточного пространства и его 2-скелета.

13. Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированый непрерывным отображением. Теорема о ретракции; фундаментальная группа произведения пространств. Фундаментальная группа – гомотопический инвариант пространства. Теорема Брауэра о неподвижной точке (доказательство в размерности 2).
14. Теорема Гаусса («основная теорема алгебры»). Фундаментальные группы конечных клеточных пространств – редукция к фундаментальным группам двумерных клеточных комплексов с одной вершиной. Копредставления групп. Свободная группа. Канонические копредставления групп поверхностей.
15. Свободное произведение групп, свойство универсальности. Группа $PSL(2,\mathbb{Z})$ и ее действие на верхней полуплоскость. Задание этой группы двумя образующими: порядка 2 и бесконечного порядка; порядков 2 и 3. Представление $PSL(2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2?\mathbb{Z}_3$.
16. Пример двух стягиваемых пространств таких, что фундаментальная группа их букета несчетна. Теорема Зейферта-ван Кампена. Доказательство для случая клеточных пространств. Разложение группы $SL(2,\mathbb{Z})$ в произведение с объединенной подгруппой.
17. Накрытия, определение и примеры; число листов. Пример: накрытие тора T^2 им самим, заданное матрицей $A \in GL(2,\mathbb{Z})$. Поднятие пути; теорема о накрывающей гомотопии; фундаментальная группа накрытия и ее образ в фундаментальной группе пространства. Число листов и классы сопряженных подгрупп.
18. Регулярные накрытия; Вполне разрывное действие дискретной группы гомеоморфизмов на связном локально-компактном пространстве и индуцируемое им накрытие. Примеры (поверхность Хопфа). Соответствие накрытий над «хорошим» пространством (связным, локально линейно связным и локально-односвязным) и подгруппами его фундаментальной группы. Универсальное накрытие; эквивалентность накрытий и единственность универсального накрытия. Примеры.
19. Дифференциальные формы на гладком многообразии. Ориентируемость, ориентация. Существование положительно ориентированного (положительно согласованного) атласа. Примеры ориентируемых и неориентируемых многообразий.
20. Внешний дифференциал и его свойства. Когомологии де Рама; пример вычисления когомологий. Отображение когомологий индуцированное гладким отображением. Ориентация многообразий с краем и согласованная ориентация края. Теорема Стокса.
21. Потоки на гладком многообразии. Примеры потоков, геометрические потоки. Дифференциал потока, гомологии де Рама. Спаривание гомологий и когомологий; теорема де Рама. Фундаментальный класс ориентируемого многообразия.
22. Масса и ко-масса, их зависимость от исходной римановой метрики. Масса фундаментального класса. Оценка абсолютной величины спаривания гомологий и когомологий через массу и ко-массу.
23. Степень гладкого отображения ориентируемых многообразий. Регулярные точки и регулярные значения гладкого отображения. Теорема Сарда (без доказательства). Целочисленность степени и ее независимость от выбора регулярного значения.
24. Кобордизмы. Степень кобордантных отображений; гомотопическая инвариантность степени. Важность ориентируемости пленки; пример. Степень mod 2; ее инвариант-

ность при кобордантности отображений, гомотопическая инвариантность. Независимость $\deg_2$ от выбора регулярного значения.

25. Степень для непрерывных отображений. Аппроксимация непрерывных отображений гладкими. Гомотопическая эквивалентность «достаточно близких» отображений гладких многообразий.
26. Особые точки векторных полей, понятие индекса изолированой особой точки; независимость индекса особой точки от выбора локальной системы координат. Примеры вычисления индекса в 2-мерном случае. Векторные поля в области $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей; теорема Хопфа. Связь с теоремой Гаусса-Бонне для поверхностей вложеных в $\mathbb{R}^3$

Дифференциальные уравнения - II

Второй семестр (нелинейные системы).

1. Теоремы о непрерывной зависимости решений от правых частей и начальных условий.
2. Теоремы о дифференцируемости решений по параметру и по начальным условиям.
3. Существование вынужденных колебаний в окрестности положения равновесия в невырожденном случае.
4. Теорема о выпрямлении векторного поля.
5. Устойчивость решений по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Исследование устойчивости с помощью функции Ляпунова.
6. Теорема Четаева о неустойчивости.
7. Теорема об устойчивости и неустойчивости по первому приближению.
8. Теорема об устойчивости и неустойчивости периодических решений (без доказательств).
9. Первые интегралы систем ОДУ. Теорема об интегрируемости системы ОДУ.
10. Линейные однородные уравнения в частных производных и их решения. Уравнение характеристик.
11. Квазилинейные неоднородные уравнения в частных производных и их решения. Понятие об ударных волнах.
12. Задача Коши для квазилинейного уравнения и ее локальная разрешимость.
13. Понятие о нормальной форме Пуанкаре в окрестности положения равновесия. Понятие о резонансных слагаемых.
14. Стандартное отображение. Теорема Обри.

Классическая механика

Кинематика

1. Закон движения точки, траектория точки относительно системы отсчета (СО). Определения скорости и ускорения точки.

2. Определение твердого тела (твердым телом называется множество точек, не лежащих на одной прямой, и расстояние между которыми не меняется со временем). Формулировка теоремы Эйлера ($\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{BA}]$). Определение угловой скорости. Доказательство теоремы Эйлера. Пример: Вычисление угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
3. Определение углового ускорения. Формула Ривальса ($\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_B + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{BA}]] + [\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{BA}]$).
4. Относительное движение: угловая скорость подвижной системы координат. Определение относительной производной. Формула относительной производной вектора ($\frac{d}{dt}\boldsymbol{u} = \frac{\delta}{\delta t}\boldsymbol{u} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}]$).
5. Определение относительных и переносных скоростей и ускорений, кориолисово ускорение. Теорема о сложении скоростей и теорема о сложении ускорений. Теорема о сложении угловых скоростей.

Предварительные сведения из динамики

6. Центр масс системы материальных точек. Кинетическая энергия системы материальных точек.
7. Оси Кенига. Кинетическая энергия системы материальных точек относительно осей Кенига. Формула Кенига ($T = m|\boldsymbol{v}_S|^2/2 + T_*$).
8. Оператор инерции твердого тела. Свойства оператора инерции.
9. Кинетическая энергия твердого тела в терминах оператора инерции: кинетическая энергия твердого тела в осях Кенига, кинетическая энергия твердого тела с неподвижной точкой.

Принцип Даламбера-Лагранжа

10. Уравнения движения системы материальных точек. Уравнения связей, активные силы и силы реакции связей.
11. Обобщенно потенциальные силы и потенциальные силы.
12. Принцип освобождаемости от связей: виртуальные перемещения, идеальные связи, реакции идеальных связей, число степеней свободы системы.
13. Общее уравнение динамики. Эквивалентность общего уравнения динамики уравнениям движения системы материальных точек.
14. Голономные и неголономные связи. Лемма об инвариантном многообразии.

Системы с голономными связями. Уравнения Лагранжа

15. Свойства функций на касательном расслоении, определение и свойства вариационной производной.
16. Ковариантность вариационной производной.
17. Редукция системы на многообразие, задаваемое геометрическими связями, конфигурационное многообразие, обобщенные координаты, обобщенные скорости, обобщенные силы.
18. Структура кинетической энергии в обобщенных координатах ($T = T_2 + T_1 + T_0$).
19. Уравнения Лагранжа второго рода.

20. Явный вид уравнений Лагранжа. Движение в отсутствии активных сил. Геодезические.
21. Обобщенно потенциальные силы и потенциальные силы. Функция Лагранжа, уравнения Лагранжа в системе, в которой все активные силы – обобщенно потенциальны.
22. Структура обобщенного потенциала ($W = W_1 + W_0$). Структура функции Лагранжа ($L = L_2 + L_1 + L_0$).
23. Циклические координаты и циклические интегралы. Обобщенный интеграл энергии и его выражение в терминах L_2, L_0.
24. Математический маятник. Фазовый портрет. Общие принципы построения фазового портрета в системе с одной степенью свободы.
25. Теорема Нетер и циклические интегралы.
26. Понижение порядка по Раусу. Структура функции Рауса (без доказательства), приведенный потенциал.
27. Углы Эйлера. Волчок Лагранжа в углах Эйлера [4].

Вариационные принципы

28. Вариационный принцип Гамильтона ($\delta \int L dt = 0$).
29. Геодезические на римановом многообразии.
30. Вариационный принцип Мопертюи-Лагранжа-Якоби ($\delta \int \sqrt{T(h-V)} dt = 0$). Метрика Якоби, геодезические.

Гамильтонова механика

31. Преобразование Лежандра, инволютивность преобразования Лежандра (только формулировка). Вывод уравнений Гамильтона из уравнений Лагранжа. Расширенное фазовое пространство и фазовое пространство гамильтоновой системы.
32. Элементы теории интегральных инвариантов.
33. Симплектические многообразия, тензорная форма уравнений Гамильтона, теорема Дарбу (без док-ва).
34. Первые интегралы уравнений Гамильтона, скобка Пуассона и ее свойства. Отделение переменных в гамильтониане. Сохранение фазового объема потоком уравнений Гамильтона.
35. Формулы

$$\Omega(v_F, v_H) = \{F, H\}, \quad [v_F, v_H] = v_{\{H,F\}}, \quad (\Omega = dp_i \wedge dx^i), \quad i_{v_H}\Omega = dH.$$

36. Пример отделения переменных в гамильтониане: Движение частицы в поле диполя [16].
37. Форма Пуанкаре-Картана $\omega = p_i dq^i - H dt$ и траектории гамильтоновой системы в расширенном фазовом пространстве [18].
38. Теорема о сохранении интеграла от ω по замкнутому контуру [18].
39. Понижение порядка гамильтоновой системы с помощью интеграла энергии.[18].
40. Канонические преобразования, фазовый поток уравнений Гамильтона.[18],[3]

41. Производящие функции канонических преобразований, уравнение Гамильтона-Якоби. [3],[18].
42. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби. Разделение переменных [18].
43. Гамильтонова версия теоремы о выпрямлении векторного поля. Отображение Пуанкаре на уровне интеграла энергии [9].
44. Гамильтонова версия теоремы Нетер. Понижение порядка в гамильтоновой системе с помощью группы симметрий.
45. Характеристическое свойство решения уравнения Гамильтона-Якоби. Задача Коши и ее решение для уравнения Гамильтона-Якоби. Решение уравнения Гамильтона-Якоби и функция Лагранжа.
46. Теорема Лиувилля об интегрируемости в квадратурах системы с инволютивным набором интегралов [3].
47. Теорема Лиувилля-Арнольда (без док-ва). Переменные "Действие-Угол"; условно периодические движения, резонансные торы.[18]
48. Переменные "Действие-Угол"в гамильтоновой системе с одной степенью свободы.
49. Дискретные динамические системы с инвариантной мерой. Теорема Пуанкаре о возвращении.
50. Эргодичность. Теорема Биркгофа-Хинчина (без док-ва) [13]. Всюду плотные траектории в эргодической системе.
51. Теорема Колмогорова о сохранении условно-периодических движений [3]: стр. 372-374. Только формулировки.

Список литературы

[1] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Удм.ГУ, 2000

[2] В. Арнольд А. Авец Эргодические проблемы классической механики. РХД, 1999.

[3] С. В. Болотин А. В. Карапетян Е. И. Кугушев Д. В. Трещев Теоретическая Механика. Москва, "Академия 2010.

[4] В.Г. Вильке Механика систем материальных точек и твердых тел. Москва, Физматлит, 2013

[5] И. М. Гельфанд С. В. Фомин Вариационное счисление. Ленинград 1961

[6] Anthony Bloch, et al Nonholonomic Mechanics and Control (Interdisciplinary Applied Mathematics) Springer 2002.

[7] Б.П. Демидович Лекции по математической теории устойчивости. Москва, Наука, 1967.

[8] Dmitry Treschev and Oleg Zubelevich (Moscow). ON WEAK SOLUTIONS TO THE. LAGRANGE–D'ALEMBERT EQUATION. Appl. Math. (Warsaw) 2416 (2013), 383-392

[9] Д.В. Трещев Гамильтонова механика. Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва 2006

[10] Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems(Springer 1993

[11] Ж. Ла-Салль, С. Лефшец Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. Мир Москва 1964

[12] В. В. Степанов Курс дифференциальных уравнений. Москва, 1958.

[13] Я. Синай Введение в эргодическую теорию. Фазис, Москва, 1996.

[14] Oleg Zubelevich Bounded solutions to a system of second order ODEs and the Whitney pendulum. Appl. Math. (Warsaw) 2418 (2015), 159-165.

[15] Gerald Teschl Differential Equations and Dynamical Systems. `http://www.mat.univie.ac.at/ gerald/ftp/book-ode/ode.pdf`

[16] Я.В. Татаринов Лекции по классической механике. МГУ 1984

[17] В.И. Арнольд В.В. Козлов А.И. Нейштадт: Динамические системы-3. Совр. пробл. математики том 3 Москва 1985.

[18] В. И. Арнольд Математические методы классической механики. Москва, "Наука"1989

[19] Новиков С.П., Тайманов И.А. - Современные геометрические структуры и поля (МЦНМО, 2005)

Курс III, осень

Динамические системы

1. Определение динамической системы с дискретным и непрерывным временем. Основные пространства динамических систем. Эквивалентность динамических систем, сопряжения, полусопряжения, факторы. Простейшие инварианты динамических систем.
2. Гомеоморфизмы окружности. Число вращения как топологический инвариант. Теорема Пуанкаре. Теорема Данжуа.
3. Непрерывные отображения отрезка. Техника накрывающих отображений. Теорема Шарковского о сосуществовании точек разных периодов.
4. Инвариантные и эргодические меры, эквивалентные определения. Теорема Боголюбова-Крылова. Эргодические меры как крайние точки в пространстве мер.
5. Элементы эргодической теории: эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина, её следствие в случае эргодической инвариантной меры.
6. Элементы энтропийной теории: три эквивалентных определения топологической энтропии, её простейшие свойства.
7. Элементы энтропийной теории: метрическая энтропия, её основные свойства. Вариационный принцип.

8. Понятие неблуждающего множества. Инварианты возвращения (альфа-, омега-предельные множества, множества реккурентных точек, аттракторы). Теорема о наличии минимального множества у непрерывного отображения компактного метрического пространства. Связь минимальности и строгой эргодичности для топологической динамической системы.
9. Структурная устойчивость динамических систем на примере диффеоморфизмов окружности. Явный критерий структурной устойчивости. Типичность этого свойства.
10. Общие критерии структурной устойчивости диффеоморфизмов замкнутых римановых многообразий. Структурная устойчивость диффеоморфизмов Аносова.
11. Методы фундаментальной области, сжимающих отображений и кодирования для нахождения сопрягающих отображений на модельных примерах доказательства структурной устойчивости диффеоморфизмов отрезка, имеющих только концевые гиперболические неподвижные точки, локальной структурной устойчивости гиперболической периодической орбиты диффеоморфизма гладкого многообразия и структурной устойчивости гладких растягивающих отображений окружности соответственно.
12. Элементы локального анализа структурной устойчивости: теорема Адамара-Перрона, гиперболические множества, устойчивые и неустойчивые подмногообразия.
13. Элементы локального анализа структурной устойчивости: теорема Хартмана-Гробмана. Критерий структурной устойчивости диффеоморфизма в окрестности неподвижной точки.
14. Элементы полулокального анализа структурной устойчивости: подкова Смейла. Кодирование.
15. Идеология нормальных форм. Резонансы как препятствия к гладкой эквивалентности. Формальное приведение гладкого отображения в окрестности неподвижной точки к нормальной форме. Гладкая эквивалентность в окрестности неподвижной точки своей линейной части на примере вещественно аналитических отображений прямой.
16. Типичность в теории динамических систем. Динамические системы общего положения. Теорема Купки-Смейла.

Теория поля

1. *Специальная теория относительности* Релятивистская кинематика. Принцип относительности Галилея и Лоренца (вывод преобразований Лоренца). Пространство Минковского, его симметрии (группы Пуанкаре и Лоренца). 4-вектора, ковектора и тензоры. Релятивистский интервал: времени-/свето-/пространственно-разделенные события. Световой конус: диаграмма Минковского. Собственное время. 4-скорость. 4-ускорение Релятивистская механика. Действие свободной частицы, ее энергия и импульс. 4-импульс, энергия покоя. Гамильтоново описание свободной частицы. Калибровочная инвариантность на примере действия релятивистской частицы. Действие для заряженной частицы в электромагнитном поле, вывод уравнения движений. Тензор поля. Сила Лоренца.

2. *Электродинамика* 4-ток. Закон сохранения заряда. Действие Максвелла и уравнения Максвелла (в релятивистском и векторном виде). Калибровочная инвариантность электромагнитного поля. Виды решений в электродинамике. Электростатика. Электрический потенциал и общее решение для комбинации покоящихся зарядов. Дипольный момент системы зарядов. Магнитостатика. Магнитный потенциал и общее решение для комбинации постоянных токов. Дипольный момент системы постоянных токов. Электромагнитное излучение. Волновые решения, плоские монохроматические волны. Поле движущихся зарядов: формальное решение электродинамики через функцию Грина. Потенциалы Лиенара-Вихерта. Излучение электромагнитных волн: электрический дипольный порядок. Вектор Умова-Пойнтинга и мощность излучения. Закон сохранения энергии э/м поля.
3. *Основы теории поля* Лагранжев формализм в теории поля. Роль граничных членов. Теорема Нётер. Тензор энергии-импульса (ТЭИ). ТЭИ для скалярного и электромагнитного полей, энергия и поток энергии э/м поля. Тензор момента и тензор спина. Скалярные теории поля. Действие, уравнения движения. Вакуум теории. Пример теории с вырожденным вакуумом (потенциал «мексиканская шляпа»). Солитонные решения (кинки). Комплексные скалярные поля: действие и его симметрия. Калибрование симметрии. Потенциал «мексиканская шляпа» и механизм Хиггса.
4. *Математические элементы теории поля (и Янг-Миллс)* Производная Ли. Производная Ли от векторных полей, полей форм и произвольных тензоров. Магическая формула Картана. Производная Ли от метрики: уравнение Киллинга, вектора Киллинга. Связности на векторном расслоении. Кривизна. Действие Янга-Миллса, уравнения движения. Скалярные поля как сечения ассоциированного расслоения. Действие Янга-Миллса со скалярными полями, уравнения движения. Связность на касательном расслоении. Кручение, неметричность. Фундаментальная теорема (псевдо)-Римановой геометрии (без вывода). Геодезические как автопараллельные кривые. Нормальные координаты на многообразии. Тензор Римана. Симметрии тензора Римана, тождества Бьянки (алгебраическое и дифференциальное).
5. *Теория поля в искривленном пространстве и общая теория относительности* Классическая механика в искривленном пространстве: действие для релятивистской частицы. Теория поля в искривленном пространстве: принцип эквивалентности в искривленном пространстве. Построение теорий с минимальной связью. Уравнения Эйнштейна. Действие Эйнштейна-Гильберта.

Функциональный анализ - I

1. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Полнота и сепарабельность. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра.
2. Нормированные пространства. Примеры: пространства, непрерывных функций, интегрируемых функций и пространства последовательностей. Изометричность метрического пространства, M части банахова пространства $B(M)$ и существование пополнения .
3. Топологические пространства. Компактные множества и их свойства.

4. Вполне ограниченные множества. Критерий вполне ограниченности в терминах фундаментальных последовательностей.
5. Равносильность различных определений компакта в метрическом пространстве.
6. Эквивалентность норм на конечномерном пространстве. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
7. Критерии компактности в $B(\Omega)$, $C[a, b]$ (теорема Асколи — Арцела) и l^2.
8. Теоремы о неподвижных точках: теорема о сжимающих отображениях и теорема, Шаудера.
9. Евклидовы пространства. Ортонормированные системы и базисы. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
10. Существование ортогональной проекции и ортогонального разложения в гильбертовом пространстве.
11. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом про- странстве. Примеры базисов. Теорема Рисса — Фишера об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
12. Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора, и непрерывность оператора.
13. Теорема Хана - Банаха и ее следствия. Сопряженное пространство.
14. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Явный вид сопряженных к конкретным пространствам (без доказательства).
15. Изометрическое вложение нормированного пространства во второе сопряженное. Сопряженный оператор.
16. Теорема, Банаха — Штейнгауза.
17. Теорема Банаха об обратном операторе (формулировка). Теорема о замкнутом графике (вывод из теоремы об обратном операторе).
18. Слабая сходимость в банаховом пространстве и $*$-слабая сходимость в сопряженном. Ограниченность слабо ограниченных множеств. Слабая сходимость в гильбертовом пространстве и в $C[a, b]$.
19. Выделение $*$-слабо сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности функционалов на сепарабельном банаховом пространстве. Случай гильбертова пространства.
20. Компактные операторы и их свойства. Примеры компактных и некомпактных операторов.

Уравнения математической физики

Программа

Классическая теория линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Корректность постановки задачи Коши и краевых задач.

Волновое уравнение. Представление решения основных начально-краевых задач. Принципы распространения волн.

Уравнение теплопроводности. Представление решения основных начально-краевых задач и их качественный анализ.

Гармонические функции и их основные свойства. Уравнения Лапласа и Пуассона. Основные внутренние и внешние краевые задачи для них. Функция Грина.

Метод Фурье и его использование.

Список вопросов к экзамену

1. Теорема Коши-Ковалевской для линейного однородного уравнения с частными производными второго порядка (формулировка). Примеры корректно и некорректно поставленных задач.
2. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения.
3. Сферические средние. Уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу.
4. Вывод формулы Кирхгофа ($n = 3$) и формулы Пуассона ($n = 2$). Метод спуска.
5. Принцип Дюамеля для волнового уравнения.
6. Волновое уравнение на оси и полуоси ($n = 1$). Задача Коши. Начально-краевая задача с краевыми условиями 1-го, 2 и 3 рода. Методы построения решения и единственность.
7. Теоремы о среднем для гармонических функций (о поверхностном среднем, о пространственном среднем, обратная теорема о среднем) .
8. Сильный принцип максимума для гармонических функций. Задача Дирихле для уравнения Пуассона и ее единственность.
9. Регулярность гармонических функций.
10. Теорема об оценках производных. Теорема Лиувилля (для гармонических функций не более, чем степенного роста).
11. Неравенство Гарнака для ограниченной области.
12. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Функция Грина задачи Дирихле. Ядро Пуассона.
13. Представление решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в терминах функции Грина.
14. Функция Грина для шара, $n = 3$. Представление решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.
15. Неравенство Гарнака для шара.
16. Теорема о равномерной сходимости последовательности гармонических функций.
17. Теорема об устранимой особенности для гармонических функций.
18. Задача Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимое условие разрешимости. Лемма о нормальной производной.
19. Внешняя краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа. Сведение к внутренней задаче. Преобразование Кельвина.
20. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формальный вывод представления решения. Ядро теплопроводности и его свойства.

21. Доказательство формулы представления решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе ограниченных функций.
22. Принцип максимума для решения уравнения теплопроводности в ограниченной области и полосе. Теорема о единственности решения задачи Коши в классе ограниченных функций.
23. Принцип Дюамеля для уравнения теплопроводности.
24. Теоремы о стабилизации для уравнения теплопроводности (формулировки и примеры применения).
25. Начально-краевые задачи для гиперболических и параболических уравнений. Энергетические методы доказательства единственности решения в случае краевых условий 1-го, 2-го и 3-го рода.
26. Метод Фурье. Общая схема для однородного и неоднородного линейного уравнения. Интеграл энергии. Экстремальное свойство собственных значений.
27. Примеры использования метода (для волнового уравнения и уравнения теплопроводности на отрезке).

Работа на ЭВМ и программирование

1. Компилируемые и интерпретируемые языки программирования. Функция $main()$ как точка входа в программу. Простейшая программа на языке C++.
2. Препроцессор языка C++, директива #include, заголовочные файлы. Типы данных. Целочисленный тип данных. Арифметические операции.
3. Ввод/вывод в C++. Оператор условного перехода, циклы. Функции. Простейшие однопроходные алгоритмы.
4. Макросы. Статические и динамические массивы. Указатели. Модель памяти в C++.
5. Алгоритмы. Оценки сложности алгоритмов. Амортизационный анализ.
6. Сортировки. Пирамидальная сортировка. Быстрая сортировка. Сортировка слиянием.
7. Порядковые статистики.
8. Тип данных с плавающей точкой. Вычислительная погрешность. Простейшие вычислительные алгоритмы. Число обусловленности. Методы решения СЛАУ.
9. Символы и строки в языке C++. Ввод/вывод. Простейшие алгоритмы работы со строками.
10. Преобразование строки в число и обратно. Конечные автоматы.
11. Разбор выражения. Использование стека, польская форма записи. Рекурсивный подход.
12. Алгоритмы на строки. Поиск подстроки в строке. Алгоритм Рабина-Карпа. Конечные автоматы. Алгоритм Кнута-Морриса-Пратта.
13. Битовые операции.
14. Структуры.

Римановы поверхности

1. Риманова поверхность функции $\sqrt[k]{z}$. Риманова поверхность алгебраической функции. [1], [2], глава 1; [3].
2. Аналитическое продолжение голоморфной функции вдоль кривой. Риманова поверхность аналитической функции. [1], глава III; [2], глава 3.
3. Риманова поверхность функции, допускающей аналитическое продолжение вдоль любой кривой на плоскости с выброшенным дискретным множеством точек. Точки ветвления, их кратность. [3]; [1], глава III; [2], глава 3.
4. Компатификация римановых поверхностей с конечным числом листов и конечным числом точек ветвления. Локальные параметры вблизи регулярных точек и точек ветвления (конечных и бесконечных).
5. Топологическая классификация компактных римановых поверхностей. Род римановой поверхности. [2], глава 5.
6. Риманова поверхность как результат склейки сторон $4g$-угольника. [2], глава 5; [9], глава 2.
7. Циклы на компактных ориентиреумых двумерных многообразиях. Канонический базис. Индекс пересечения. Когомологии де Рама компактных ориентиреумых двумерных многообразий. [2], глава 5
8. Функции, векторные поля и дифференциалы на римановой поверхности. [2], глава 10.
9. Голоморфные дифференциалы на гиперэллиптической поверхности: явные формулы. [9].
10. Выражение для рода римановой поверхности в терминах нулей и полюсов мероморфного векторного поля. Выражение для рода римановой поверхности в терминах нулей и полюсов мероморфного дифференциала. [2], [9]
11. Гильбертово пространство дифференциалов на компактных римановых поверхностях $\mathcal{L}(\Gamma)$. Разложение $\mathcal{L}(\Gamma) = E \oplus E^* \oplus H$, где E-пространство точных дифференциалов, E^*-пространство коточных дифференциалов, H–пространство гармонических дифференциалов. Оператор сглаживания, гладкость элементов из H. [2], глава 7.
12. Теоремы существования для голоморфных и мероморфных дифференциалов. [2], глава 8.
13. Пространство Тейхмюллера и пространство модулей эллиптических кривых. [5], глава 2.
14. Билинейные соотношения Римана. [2], глава 10; [9], глава 2.
15. Канонический базис диференциалов. [9] глава 2.
16. Теорема Римана-Роха. [2], глава 10; [4], лекция 5.
17. Матрица Римана, ее симметрия и положительность мнимой части. [2], глава 10; [9] глава 2.
18. Преобразование Абеля, якобиан кривой. [9] глава 2.
19. Эллиптические функции Вейерштрасса. Свойства периодичности. [5, 6, 7].
20. Эллиптические функции Якоби. Свойства периодичности. [5, 6, 7].

21. Тета-функции одной переменной. Выражение эллиптических функций через тета-функции. [5, 6, 7].
22. Обращение преобразования Абеля для эллиптических кривых. [5, 6].
23. Тета-функции Римана многих переменных. Свойства периодичности. [9] глава 1; [11]; [12]; [13].
24. Решение задачи об обращении преобразования Абеля. Вектор римановых констант. [9]; [11]; [12].
25. Уравнение Кортевега - де Фриза (КдФ). Представление КдФ в форме Лакса. [10], [8].
26. Риманова поверхность периодического потенциала одномерного оператора Шредингера. Понятие конечнозонного потенциала. [10], [8].
27. Линеаризация динамики конечнозонных решений КдФ на якобиане. [10], [8], [9], [13].
28. Формула Итса для собственной функции конечнозонного оператора. [9], [13].
29. Формула Итса-Матвеева для конечнозонных решений КдФ. [8] [9], [13].

Список литературы

[1] Шабат Б.В. “Введение в комплексный анализ”, т.1.

[2] Спрингер Дж., “Введение в теорию римановых поверхностей” — М.: ИЛ, 1960.

[3] Алексеев В.Б., “Теорема Абеля в задачах и решениях” — М.: МЦНМО,. 2001.

[4] Львовский С.М., Спец.курс. Римановы поверхности: https://math.hse.ru/spec-riman.

[5] Ахиезер Н.И., “Элементы теории эллиптических функций”, М.: Наука, 1970.

[6] Абрамовиц М., Стиган И., “Справочник по специальным функциям”. М: Наука, 1979.

[7] Бейтмен Г., Эрдейи А., “Высшие трансцендентные функции: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье”. М.: Наука, 1967.

[8] Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П., “Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия”, УМН, 31:1(187) (1976), 55–136;

[9] Дубровин Б.А., “Тэта-функции и нелинейные уравнения”, *УМН*, **36**:2(218) (1981), 11–80

[10] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П., “Теория солитонов: Метод обратной задачи”. М.: Наука, 1980.

[11] Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях*, М.: Мир, 1988, 448 с.

[12] Fay J. D., “Theta functions on Riemann surfaces”, Lecture Notes in Math., 352, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973.

[13] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enolskii, A. R. Its, V. B. Matveev, Algebro-geometric approach to nonlinear integrable equations, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Курс III, весна

Функциональный анализ - II

1. Спектр оператора. Сохранение обратимости при малых возмущениях. Замкнутость спектра, включение его в круг радиуса, равного норме оператора, и непустота.
2. Спектр диагонального оператора. Спектр оператора умножения на функцию. Теорема об отображении спектров для многочленов.
3. Строение спектра компактного оператора в бесконечномерном пространстве (формулировка). Альтернатива Фредгольма $\mathrm{Ker}(I-K)=0 \Leftrightarrow (I-K)X=X$.
4. Самосопряженный оператор и его квадратичная форма. Критерий Вейля и вещественность спектра самосопряженного оператора.
5. Равенства

$$\|A\| = \sup\{|(Ax,x)|, \|x\| \le 1\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \text{ - точка спектра } A\}$$

   для самосопряженного оператора A.
6. Теорема Гильберта—Шмидта о компактных самосопряженных операторах.
7. Понятие о локально выпуклом пространстве. Примеры. Пространства D и S и сходимость в них. Плотность D в пространстве $L^2(\mathbb{R}^1)$.
8. Обобщенные функции классов D' и S'. Производная обобщенной функции. Равенство $(\ln|x|)' = \mathrm{V.\,P.}\,\frac{1}{x}$.
9. Преобразование Фурье интегрируемых функций и его основные свойства (непрерывность, ограниченность, производная преобразования Фурье, преобразование Фурье производной).
10. Формула обращения для преобразования Фурье в случае интегрируемого преобразования Фурье. Формула обращения в точках дифференцируемости (формулировка). Преобразование Фурье в S и его непрерывность.
11. Равенство Парсеваля для интегралов Фурье. Инъективность преобразования Фурье. Полнота системы функций Эрмита.
12. Унитарные операторы. Преобразование Фурье в L^2 и теорема Планшереля.
13. Преобразование Фурье в S'. Преобразование Фурье дельта-функции. Согласованность преобразований Фурье в L^1, L^2 и S'.
14. Свертка интегрируемых функций. Свертка обычной и обобщенной функций. Использование преобразования Фурье и свертки для решения дифференциальных уравнений.
15. Пространства С.Л. Соболева $W^{p,k}$ и их характеризация через пополнение по соболевской норме.

16. Описание $W^{2,k}$ через преобразование Фурье. Теоремы вложения в L^q и C (без доказательства).
17. Унитарная эквивалентность операторов. Спектр оператора преобразования Фурье и спектр оператора свертки.
18. Непрерывные функции от самосопряженных операторов и равенство $\|f(A)\| = \sup_{t\in\sigma(A)} |f(t)|$ для самосопряженного оператора A.
19. Циклические векторы. Эквивалентность самосопряженного оператора оператору умножения на функцию (доказательство для случая оператора с циклическим вектором).
20. Проекторы и проекторнозначные меры. Представление самосопряженного оператора в виде интеграла по проекторнозначной мере. Явное вычисление спектральной меры для оператора умножения на аргумент и для проектора.

Теория Ли

1. Понятие группы Ли. Примеры групп Ли. Подгруппы Ли, их замкнутость.
2. Связная группа Ли порождается любой окрестностью единицы. Связные компоненты групп Ли, группа компонент.
3. Дифференцирование умножения и инверсии на группе Ли. Дифференцируемые отображения постоянного ранга.
4. Фазовый поток векторного поля на многообразии. Производная Ли, коммутатор векторных полей.
5. Правоинвариантные векторные поля на группе Ли. Однопараметрические подгруппы и экспоненциальное отображение, его свойства.
6. Присоединённое представление группы Ли. Касательная алгебра, Ли.
7. Гомоморфизмы групп Ли и их дифференциалы, связь с . Экспонента суммы коммутирующих элементов алгебры Ли.
8. Касательная алгебра Ли подгруппы Ли. Связная подгруппа Ли однозначно определяется своей касательной алгеброй Ли. Пересечение подгрупп Ли.
9. Ядра, образы, прообразы групп Ли при гомоморфизмах. Линейные представления групп Ли и алгебр Ли, связь между ними: инвариантные подпространства, полная приводимость, теоретико-представленческие конструкции (сопряжённое представление, прямая сумма, тензорное произведение).
10. Действия групп Ли на многообразиях, поля скоростей, их фазовые потоки. Алгебра Ли правоинвариантных векторных полей на группе Ли.
11. Свойства орбит и стабилизаторов для действий и линейных представлений групп Ли.
12. Автоморфизмы и дифференцирования конечномерной алгебры. Внутренние автоморфизмы и дифференцирования алгебры Ли.
13. Транзитивные действия групп Ли и однородные многообразия. Представление изотропии. Структура однородного многообразия на множестве левых смежных классов по подгруппе Ли.

14. Факторгруппы Ли, их касательные алгебры Ли. Основная теорема о гомоморфизмах групп Ли.
15. Односвязная накрывающая группы Ли. Коммутативность фундаментальной группы.
16. Классификация связных коммутативных групп Ли.
17. Годограф скорости кривой на группе Ли. Существование кривой с заданным годографом скорости и начальным условием. Деформация кривой на группе Ли, дифференциальное уравнение годографа деформации.
18. Интегрирование гомоморфизмов алгебр Ли. Односвязная группа Ли однозначно определяется своей алгеброй Ли.
19. Центр и коммутант группы Ли и алгебры Ли.
20. Разрешимость групи Ли и алгебр Ли.
21. Теорема Ли и её следствия.
22. Теорема Энгеля и её следствия.
23. Инвариантные скалярные умножения на алгебрах Ли. Форма Киллинга.
24. Критерий разрешимости линейной алгебры Ли в терминах стандартного скалярного умножения.
25. Полупростые алгебры Ли и группы Ли. Критерии Картана раз решимости и полупростоты алгебры Ли. Структура полупростой алгебры Ли.
26. Теорема Вейля о полной приводимости линейных представлений полупростой алгебры Ли.
27. Дифференцирования полупростых алгебр Ли. Существование группы Ли с заданной пролупростой касательной алгеброй Ли.

Уравнения математической физики

Программа

Обобщенные функции и их свойства. Применение их для построения обобщенных решений линейных уравнений.

Пространства Соболева. Теоремы вложения. Следы по гиперповерхности. Обобщенные решения краевых задач для уравнения Пуассона. Вариационный подход.

Нелинейные законы сохранения. Потеря гладкости и построение обобщенного решения. Проблема неединственности и способы ее решения. Допустимые разрывы, вязкостная регуляризация, энергетические характеристики разрывов, эффект добавления старших производных. Обобщенное энтропийное решение.

Уравнение Гамильтона-Якоби. Уравнение Кортевега-де Вриза. Уравнения реакции-диффузии. Бегущие волны и несуществование решения.

1. Основные и обобщенные функции. Действия с обобщенными функциями.
2. Сходимость в пространстве обобщенных функций.
3. Замена переменной для обобщенных функций. Первообразная.
4. Фундаментальное решение линейного оператора.

5. Прямое произведение и свертка, их свойства. Сверточная алгебра.
6. Регуляризация обобщенных функций. Решение неоднородных линейных уравнений.
7. Обобщенная задача Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности.
8. Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций и его свойства. Нахождение фундаментальных решений линейных дифференциальных операторов при помощи преобразования Фурье.
9. Пространства Соболева. Полнота и сепарабельность. Описание пространств Соболева в терминах преобразования Фурье.
10. Теорема вложения Соболева.
11. Неравенство Фридрихса.
12. Неравенство Пуанкаре.
13. Продолжение функций из пространств Соболева из области на все пространство. Неравенство Гальярдо-Ниринберга (б/д) и его следствия.
14. След функций из пространств Соболева на границе области.
15. Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона с однородными и неоднородными краевыми условиями. Существование и единственность. Связь между классическим и обобщенным решением.
16. Вариационный метод. Получение обобщенного решения задачи Дирихле вариационным методом.
17. Нелинейные законы сохранения первого порядка. Задача Коши и проблема потери решением гладкости. Критерий потери гладкости.
18. Условия Ранкина-Гюгонио. Обобщенное решение в смысле интегрального тождества и его свойства.
19. Проблема неединственности обобщенного решения и способы ее разрешения. Допустимые разрывы. Метод вязкостной регуляризации.
20. Энергетические характеристики разрыва.
21. Эффекты добавления членов с производными высокого порядка.
22. Уравнение Кортевега - де Вриза.
23. Допустимое решение и его единственность.
24. Решение задачи Римана при произвольных функциях потока.
25. Обобщенное энтропийное решение по Кружкову и его свойства.
26. Формула Лакса-Олейник и следствия из нее.
27. Асимптотика при больших временах в разных нормах. Распад в N-волну.
28. Уравнение Гамильтона-Якоби. Характеристики. Связь с законами сохранения.
29. Уравнения реакции-диффузии. Бегущие волны и разрушение решения.

Работа на ЭВМ и программирование

1. Объектно-ориентированное программирование. Пространства имён. Ключевое слово const. Lvalue ссылки. Классы. Поля и методы класса. Модификаторы доступа. Конструкторы и деструкторы. Список инициализации. Динамическое создание и удаление объектов класса.
2. Перегрузка операторов. Операторы приведения типа. Перегрузка различных унарных и бинарных операций. Операция копирующего присваивания. Индексация и функциональный вызов. Битовые операции.
3. Исключения. Обработка ошибок в языке C++.
4. Статические члены классов. Дружественные функции.
5. Наследование классов. Полиморфизм. Абстрактные классы. Виртуальный деструктор. Динамическое приведение типов.
6. Структуры данных. Стек, очередь, дек, списки. Библиотека контейнеров языка C++.
7. Бинарное дерево поиска. Сбалансированные деревья. Обход в глубину, обход в ширину. AVL деревья. Красно-чёрные деревья. B-деревья.
8. Хеширование.
9. Графы. Обход в глубину. Обход в ширину.
10. Поиск кратчайших путей в графе. Алгоритм Дейкстры, алгоритм Форда-Беллмана.
11. Поиск минимального остова в графе. Алгоритм Крускала.
12. Суффиксные деревья. Алгоритм Укконена построения суффиксного дерева.

Теория вероятностей

1. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Системы событий: π- и λ-системы. Наименьшие системы, порожденные произвольной системой подмножеств. Две теоремы о π- и λ-системах.
2. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Пример применения: задача о “сумасшедшей” старушке. Формула Байеса.
3. Независимость событий и систем событий на вероятностном пространстве. Критерий независимости для конечного набора σ-алгебр. Независимость бесконечного набора систем событий.
4. Функция распределения вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, ее основные свойства. Теорема о взаимно-однозначном соответствии функций распределения и вероятностных мер на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
5. Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой, основные примеры. Теорема Лебега о представлении произвольной меры (функции распределения) на прямой.
6. Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Многомерная функция распределения, ее основные свойства. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ по функции распределения (б/д). Примеры многомерных функций распределения.

7. Согласованные последовательности вероятностных мер. Теорема Колмогорова о продолжении меры на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$.
8. Случайные элементы, случайные величины и векторы на вероятностном пространстве. Критерий измеримости отображения. Следствие: эквивалентные определения случайных величин и векторов.
9. Характеристики случайной величины и случайного вектора: распределение вероятностей, функция распределения, порожденная σ-алгебра. Понятие $\mathcal{C}$-измеримой случайной величины. Теорема о характеризации $\mathcal{F}_\xi$-измеримых случайных величин.
10. Независимость произвольного набора случайных величин. Критерий независимости в терминах совместной функции распределения, его обобщение для случайных векторов. Теорема о независимости борелевских функций от независимых случайных векторов. Независимость функций от непересекающихся наборов независимых с.в.
11. Совместное распределение независимых случайных величин как прямое произведение. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин. Лемма о свертке распределений. Формула свертки для вычисления плотности суммы независимых случайных величин.
12. Дисперсия, ковариация и коэффициент корреляции, их основные свойства. Следствие для дисперсии суммы независимых случайных величин. Матрица ковариаций случайного вектора, ее свойства. Неравенства Маркова, Чебышева и Йенсена.
13. Виды сходимостей случайных величин: с вероятностью 1 (почти наверное), по вероятности, в L^p, по распределению. Критерий сходимости с вероятностью 1. Теорема о взаимоотношении различных видов сходимостей.
14. Закон больших чисел в форме Чебышева. Достаточное условие сходимости с вероятностью 1. Усиленный закон больших чисел для попарно некоррелированных случайных величин. Смысл УЗБЧ.
15. Лемма Бореля – Кантелли. Критерий конечности математического ожидания неотрицательной случайной величины.
16. Усиленный закон больших чисел в форме Этемади для попарно независимых одинаково распределенных случайных величин. Следствие: усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова. Критерий выполнимости УЗБЧ для н.о.р.с.в.
17. Слабая сходимость и сходимость в основном вероятностных мер. Теорема Александрова.
18. Классы множеств, определяющие слабую сходимость к мере P. Теорема о достаточном условии слабой сходимости, следствие из нее. Теорема об эквивалентности слабой сходимости вероятностных мер и сходимости в основном соответствующих им функций распределения. Следствие для сходимости по распределению случайных величин.
19. Плотность и относительная компактность семейств вероятностных мер. Теорема Прохорова (док-во только для $\mathbb{R}$). Следствие из нее.
20. Характеристические функции случайных величин, векторов и вероятностных мер. Вычисление характеристической функции для стандартного нормального распределения. Основные свойства характеристических функций случайных величин (единственность — б/д).

21. Формула обращения для характеристических функций. Следствие — свойство единственности для характеристических функций. Вычисление распределения суммы независимых нормальных случайных величин. Критерий независимости компонент случайного вектора в терминах характеристических функций.
22. Лемма об оценке “хвоста” распределения с помощью характеристической функции. Теорема непрерывности для характеристических функций.
23. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин, следствия из нее. Смысл ЦПТ. Теорема Берри–Эссеена об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме (б/д). ЦПТ в форме Линдеберга (б/д).
24. Виды сходимостей случайных векторов, связь с одномерными сходимостями. Теорема о наследовании сходимости. Усиленный закон больших чисел для случайных векторов.
25. Теорема Слуцкого. Пример применения: построение асимптотического доверительного интервала для параметра в схеме Бернулли.
26. Гауссовские случайные векторы (многомерное нормальное распределение). Теорема о трех эквивалентных определениях. Следствия из нее: основные свойства гауссовских случайных векторов.
27. Условное математическое ожидание случайной величины относительно σ-алгебры. Теорема о существовании. Явный вид условного математического ожидания в случае, если σ-алгебра порождена счетным разбиением.
28. Основные свойства условного математического ожидания (10 штук).
29. Условное математическое ожидание $\mathsf{E}\,(\xi|\eta = y)$, связь с $\mathsf{E}(\xi|\eta)$. Условное распределение одной случайной величины относительно другой. Доказательство существования условного распределения.
30. Условная плотность одной случайной величины относительно другой. Теорема о вычислении условного математического ожидания с помощью условной плотности. Теорема о достаточном условии существования условной плотности.

Квантовая механика

1. Квантовая механика на языке линейной алгебры, наблюдаемые, гильбертово пространство, принцип неопределенности.
2. Операторы, их символы, упорядочение, формула Вейля для звездочки-произведения, деформационное квантование.
3. Квантовый осциллятор.
4. Одномерное уравнение Шредингера, дискретный и непрерывный спектры. Примеры.
5. Угловой момент. Теория представлений алгебры и группы Ли $SO(3)$.
6. Атом водорода.
7. Квазиклассическое приближение. Правило квантования Бора-Зоммерфельда.
8. Теория возмущения.
9. Интеграл Фейнмана по путям. Теорема Ли-Кало.

10. Интеграл Фейнмана по путям. Пример свободной частицы.
11. Статистический ансамбль квантовых состояний. Матрица плотности.
12. Современный взгляд на принципы квантовой механики. Квантовая запутанность, квантовая нелокальность (неравенство Белла, парадоксы), квантовые вычисления.

Курс IV, осень

Теория гомологий

1. Симплициальные комплексы и триангуляции.
2. Полусимплициальные комплексы (Δ-комплексы).
3. Симплициальные гомологии: определение, примеры вычислений.
4. Сингулярные гомологии: определение, вычисление нульмерных гомологий и гомологий точки.
5. Функториальность и гомотопическая инвариантность сингулярных гомологий.
6. Длинная точная последовательность гомологий цепных комплексов.
7. Относительные группы сингулярных гомологий и точная последовательность пары.
8. Теорема вырезания для сингулярных гомологий.
9. Следствия теоремы вырезания: сведение относительных гомологий к абсолютным, гомологии сферы, изоморфизм надстройки, гомологии букета, топологическая инвариантность размерности.
10.] Точная последовательность Майера–Виеториса для сингулярных гомологий.
11. Эквивалентность симплициальных и сингулярных гомологий.
12. Клеточный цепной комплекс и его гомологии.
13. Описание граничного гомоморфизма в клеточном цепном комплексе. Вычисление клеточных гомологий двумерных поверхностей и проективных пространств.
14. Эйлерова характеристика конечного клеточного пространства.
15. Связь фундаментальной группы и первой группы гомологий (теорема Пуанкаре).
16. Гомологии с коэффициентами и когомологии, их свойства.
17. Коэффициентные точные последовательности для гомологий и когомологий. Гомоморфизмы Бокштейна.
18. Функторы Tor и Ext для модулей над коммутативным кольцом.
19. Формулы универсальных коэффициентов для гомологий и когомологий с коэффициентами в абелевых группах.
20. Произведение Колмогорова–Александера ($\smile$-произведение) на сингулярных коцепях и когомологиях. Кольцо когомологий.
21. Относительные произведения и $\times$-произведение в когомологиях пар пространств.
22. Клеточное определение умножения в когомологиях.

23. Формула Кюннета для гомологий и когомологий произведения пространств с коэффициентами в области главных идеалов.
24. Вычисления кольца когомологий для n-мерного тора и проективных пространств.
25. Топологические и гладкие многообразия. Группы локальных гомологий. Ориентация. Фундаментальный класс.
26. Степень отображения многообразий.
27. $\frown$-произведение и определение изоморфизмов двойственности Пуанкаре.
28. Когомологии с компактными носителями: определение и свойства.
29. Двойственность Пуанкаре для когомологий с компактными носителями.
30. Связь двойственности Пуанкаре с умножением в когомологиях. Алгебры Пуанкаре. Сигнатура замкнутого ориентированного многообразия.

Вариационное исчисление и оптимальное управление

1. Теорема о первой и второй вариации функционала вариационного исчисления.
2. Лемма Дю Буа-Реймона и уравнение Эйлера-Лагранжа.
3. Слабый и сильный локальный минимум. Необходимое условие Лежандра.
4. Теорема Вейерштрасса–Эрдмана–Кларка о C^1 гладкости экстремалей.
5. Преобразование Лежандра и Гамильтонов формализм. Теорема Гильберта о гладкости (и аналитичности) экстремалей.
6. Необходимое условия Якоби слабого локального минимума.
7. Необходимое условие Вейерштрасса сильного локального минимума.
8. Свойства 1-формы Пуанкаре-Картана и функции действия. Уравнение Гамильтона-Якоби.
9. Поле экстремалей и лежандровы поверхности. Гидродинамическая лемма Стокса.
10. Теорема о достаточности условий Лежандра и Вейершстрасса для экстремали, погруженной в поле.
11. Достаточное условие Якоби о погружении экстремали в поле.
12. Теорема Кренера о внутренности множества достижимости и следствия из нее.
13. Теорема Нагано-Суссмана об орбите.
14. Теорема Рашевского-Чжоу.
15. Принцип Гюйгенса.
16. Лемма об одной иголке. Лемма о пакете иголок.
17. Теорема о неявной функции (в конечномерном случае при условии, что производная существует лишь в одной точке).
18. Принцип максимума Понтрягина в геометрической форме (для траектории, выходящей на границу множества достижимости).
19. Принцип максимума Понтрягина для общей задачи оптимального управления (в форме Майера).
20. Теорема Филиппова о существовании оптимального управления в линейной по управлениям задаче.

Теория случайных процессов

1. Простейшее симметричное случайное блуждание на прямой, лемма об оценке вероятности $P(S_n > t)$ (б/д). Неравенство Колмогорова и закон повторного логарифма для простейшего симметричного случайного блуждания.
2. Производящие функции случайных величин, их основные свойства (б/д). Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Соотношение между производящими функциями числа частиц в n-м и $(n+1)$-м поколениях. Вывод уравнения для вероятности вырождения процесса. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса.
3. Докритические, критические и надкритические ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Предельная теорема для надкритического случая.
4. Общее понятие случайного процесса (случайной функции), траектории случайного процесса. Пространство траекторий случайного процесса, цилиндрическая сигма-алгебра на нем. Эквивалентное определение случайного процесса, как одного измеримого отображения в пространство траекторий. Конечномерные распределения случайного процесса, условия симметрии и согласованности.
5. Теорема Колмогорова о существовании случайных процессов со значениями в $\mathbb{R}^T$. Условия согласованности семейства вероятностных мер на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ в терминах характеристических функций.
6. Процессы с независимыми приращениями, критерий существования в терминах характеристических функций приращений.
7. Пуассоновский процесс с ведущей мерой как процесс с независимыми приращениями, доказательство существования. Явная конструкция пуассоновского процесса постоянной интенсивности: процесс восстановления для экспоненциальных случайных величин. Свойства траекторий явной конструкции.
8. Ковариационная функция случайного L^2-процесса, ее симметричность и неотрицательная определенность. Гауссовские случайные процессы. Доказательство существования гауссовского процесса с заданными функцией среднего и ковариационной функцией.
9. Винеровский процесс (процесс броуновского движения), доказательство существования. Теорема о двух эквивалентных определениях винеровского процесса. Модификация случай- ного процесса. Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации (б/д). До- казательство существования непрерывной модификации у винеровского процесса.
10. Функции Хаара и Шаудера. Три вспомогательные леммы и построение явной конструкции винеровского процесса.
11. Понятие фильтрации на вероятностном пространстве, естественная фильтрация случайного процесса. Марковские моменты и моменты остановки, примеры. Процессы Леви. Строго марковское свойство для процессов Леви.
12. Момент достижения винеровским процессом уровня x. Доказательство того, что он является моментом остановки. Неограниченность траекторий винеровского процесса с помощью закона 0 или 1.

13. Принцип отражения для винеровского процесса. Совместное распределение максимума винеровского процесса на отрезке $[0, t]$ и его правого конца. Теорема Башелье.
14. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Критерий мартингальности для процессов с независимыми приращениями. Разложение Дуба для согласованных процессов с дискретным временем.
15. Теорема Дуба об остановке для мартингалов с дискретным временем, следствие из нее.
16. Аналог теоремы Дуба для случая непрерывного времени (б/д). Применение: оценка вероятности разорения в модели страхования Крамера-Лундберга.
17. Общее понятие марковского процесса. Теорема об эквивалентных определениях марковского процесса. Доказательство того, что процессы с независимыми приращениями являются марковскими.
18. Понятие переходной функции, переходная функция марковского процесса, ее существование (б/д). Теорема о существовании марковских процессов. Понятие переходной плотности. Марковские цепи с дискретным временем: определение, основные свойства переходных веро- ятностей.
19. Однородные марковские цепи, стационарные и предельное распределение матрицы переходных вероятностей. Эргодическая теорема для случая конечного фазового пространства, следствие из нее.
20. Непрерывность случайных процессов: стохастическая и в среднем квадратическом. Критерии непрерывности. Дифференцирование случайных процессов по вероятности и в среднем квадратическом. Свойства L^2-производной от случайного процесса.
21. Интегрирование случайных процессов в среднем квадратическом. Критерий интегрируемости в среднем квадратичном на отрезке и следствие из него. Свойства L^2-интегралов от случайного процесса. Понятие измеримого процесса, достаточное условие измеримости. Достаточное условие потраекторной интегрируемости (б/д).
22. Стационарные случайные процессы: стационарность в узком и широком смыслах. Взаимосвязь между ними. Теорема Биркгофа-Хинчина (б/д). Усиленный закон больших чисел (эргодическая теорема) для стационарных в узком смысле последовательностей.
23. Ортогональные случайные меры на полукольце подмножеств. Структурная мера ортогональной случайной меры. Теорема о связи ортогональных случайных мер на полукольце полуинтервалов и процессов с ортогональными приращениями (б/д). Построение стохастического интеграла по ортогональной случайной мере для произвольной функции из $L^2(\Lambda, \sigma(K), \mu)$, его основные свойства (только идеи доказательств).
24. Комплекснозначные случайные процессы. Неотрицательная определенность комплекснозначных функций. Теорема Герглотца (б/д). Спектральная мера и спектральная плотность стационарного случайного процесса $(X_n, n \in \mathbb{Z})$. Первая теорема о спектральном представлении, ее доказательство с помощью спектральной теоремы для унитарных операторов. Следствие: совпадение структурной меры процесса и спектральной меры ковариационной функции.

25. Теорема Бохнера-Хинчина (б/д). Спектральная мера и спектральная плотность стационарного случайного процесса $(X_t, t \in \mathbb{R})$. Вторая теорема о спектральном представлении, ее доказательство с помощью спектральной теоремы для неограниченных операторов и теоремы Стоуна. Следствие: совпадение структурной меры процесса и спектральной меры ковариационной функции.
26. Стохастический интеграл Ито. Понятие винеровского процесса относительно фильтрации, построение интеграла Ито для функций из $L^2((0,+\infty)\times\Omega, \mathcal{P}RED, mes\times P)$ с помощью ортогональных случайных мер. Основные свойства интеграла Ито. Предсказуемые процессы. Лемма о достаточном условии предсказуемости. Лемма о вычислении интеграла Ито для ступенчатых функций.
27. Лемма о вычислении интеграла Ито по конечному отрезку, как предела в L^2. Процесс Ито для предсказуемых L^2-процессов, теорема о процессе Ито (доказательство только для ступенчатых процессов).

Курс IV, весна

Алгебраическая геометрия

1. Лемма Накаямы.
2. Лемма Нётер о нормализации.
3. Теорема Гильберта о нулях.
4. Аффинные множества. Топология Зарисского. Существование и единственность разложения аффинного множества в объединение неприводимых компонент.
5. Проективные множества. Однородная теорема Гильберта о нулях.
6. Алгебра регулярных функций на аффинном множестве.
7. Регулярные отображения аффинных множеств. Обратный образ регулярной функции. Необходимые и достаточные условия инъективности и сюръективности обратного образа для регулярного отображения аффинных множеств.
8. Предпучки и пучки. Сечения пучка регулярных функций на главном открытом подмножестве неприводимого аффинного множества. Характеризация морфизмов в терминах пучка регулярных функций на неприводимом аффинном множестве.
9. Предмногообразия. Аффинные и проективные многообразия.
10. Произведение предмногообразий.
11. Произведение проективных многообразий является проективным многообразием.
12. Отделимость. Многообразия.
13. Конечные морфизмы аффинных многообразий: замкнутость, сюръективность, конечность слоев.
14. Теорема Крулля о главных идеалах.
15. Определение размерности через длины цепочек вложенных подмногообразий. Размерность множества нулей однородного многочлена на проективном многообразии. Теорема Тзена.

16. Теоремы о размерности слоёв.
17. Теорема Шевалле о конструктивности образа при регулярном отображении.
18. Полные многообразия. Проективные многообразия полны. Полунепрерывность размерности слоёв для морфизмов полных многообразий.
19. Грассманиан как проективное многообразие. Размерность. Уравнения Плюккера (без доказательства).
20. Критерий неприводимости в терминах размерности слоёв.
21. Прямые на кубической поверхности.
22. Бирациональные отображения. Любое многообразие бирационально гиперповерхности.
23. Касательное пространство.
24. Простые и особые точки. Касательное пространство в простой точке.
25. Локальные параметры в простой точке. Разложение в степенные ряды.
26. Подмногообразие коразмерности 1 в окрестности простой точки задаётся одним уравнением.
27. Бирациональные гладкие проективные кривые изоморфны.
28. Дивизоры. Кратность рациональной функции в подмногообразии коразмерности 1. Группа классов дивизоров.
29. Теорема о сдвиге носителя дивизора с точек.
30. Дивизоры на кривых. Степень обратного образа точки при морфизме кривых. Степень главного дивизора на кривой.
31. Плоская кубика.
32. Плоские кривые. Кратность пересечения, теорема Безу. Формула для рода плоской кривой (без доказательства).

Математическая статистика

1. Вероятностно-статистическая модель, понятия наблюдения и выборки. Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения. Обоснованность основной задачи математической статистики и теорема Гливенко–Кантелли.
2. Статистики и оценки. Общая идея построения хороших статистик, примеры: выборочные усреднения, порядковые статистики, выборочные квантили, M-оценки. Основные свойства оценок: несмещенность, состоятельность, сильная состоятельность, асимптотическая нормальность. Примеры. Наследование асимптотических свойств при взятии непрерывной функции.
3. Методы нахождения оценок, общий принцип подстановки. Метод моментов, состоятельность оценки метода моментов.

4. Выборочные квантили и выборочная медиана. Теорема об асимптотической нормальности выборочной квантили.
5. Сравнение оценок, функция потерь и функция риска. Подходы к сравнению оценок: равномерный, байесовский, минимаксный, асимптотический. Допустимые оценки.
6. Доминируемое семейство распределений, условия его регулярности. Неравенство Рао–Крамера и эффективные оценки. Критерий эффективности оценки.
7. Информация Фишера в условиях регулярности и её свойства. Матричное неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Многомерное неравенство Рао–Крамера, критерий эффективности в многомерном случае.
8. Метод максимального правдоподобия. Примеры. Экстремальное свойство функции правдоподобия. Теорема о существовании состоятельного решения уравнения правдоподобия. Состоятельность оценки максимального правдоподобия.
9. Теорема об асимптотической нормальности состоятельного решения уравнения правдоподобия. Асимптотическая нормальность оценки максимального правдоподобия.
10. Теорема Бахадура (б/д). Пример, показывающий возможность невыполнения неравенства $\sigma^2(\theta) \geq i^{-1}(\theta)$ на множестве лебеговой меры нуль. Асимптотически эффективные оценки. Асимптотическая эффективность и эффективность оценки максимального правдоподобия.
11. Теорема о наилучшем квадратичном прогнозе. Байесовская оценка, априорные и апостериорные плотности. Теорема о байесовской оценке, ее оптимальность в байесовском подходе к сравнению оценок.
12. Минимаксные оценки. Достаточное условие минимаксности оценки. Наихудшие априорные распределения. Пример с минимаксной оценкой для параметра в схеме Бернулли. Второе достаточное условие минимаксности оценки.
13. Достаточные статистики. Теорема Колмогорова–Блэкуэлла—Рао об улучшении несмещенных оценок и ее многомерное следствие. Полные статистики. Теорема об оптимальной оценке.
14. Критерий факторизации Неймана–Фишера, доказательство для дискретного случая. Примеры, нахождение оптимальной оценки параметра $\theta > 0$ в случае выборки из $\mathrm{U}(0, \theta)$.
15. Формула пересчета условных математических ожиданий по двум мерам. Критерий факторизации Неймана–Фишера в общем случае.
16. Экспоненциальное семейство распределений. Теорема о полной достаточной статистике в экспоненциальном семействе. Пример: нахождение оптимальных оценок параметров по выборке из $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.
17. Доверительные интервалы и доверительные области. Метод центральной статистики. Асимптотические доверительные интервалы. Построение асимптотических доверительных интервалов с помощью асимптотически нормальных оценок. Примеры.
18. Линейная регрессионная модель. Оценка по методу наименьших квадратов, ее основные свойства. Лемма об оптимальности в классе несмещенных линейных оценок. Несмещенная оценка для параметра дисперсии в линейной регрессионной модели.

19. Линейная гауссовская модель. Достаточные статистики в линейной гауссовской модели. Оптимальные оценки параметров в линейной гауссовской модели, их распределения.
20. Распределения хи-квадрат, Стьюдента и Фишера. Теорема об ортогональных разложениях гауссовского случайного вектора. Доверительные интервалы и эллипсоиды для параметров гауссовской линейной модели. Примеры.
21. Проверка статистических гипотез: общие принципы и основные понятия (критическое множество, уровень значимости, альтернативы, ошибки первого и второго родов, функция мощности). Сравнения критериев: равномерно наиболее мощные критерии. Несмещенность и состоятельность статистического критерия. Лемма Неймана–Пирсона для проверки простых гипотез. Построение с ее помощью наиболее мощных критериев.
22. Семейства с монотонным отношением правдоподобия. Монотонность функции мощности для таких семейств. Теорема о монотонном отношении правдоподобия. Свойства построенного равномерно наиболее мощного критерия. Примеры.
23. Двойственность доверительного оценивания и проверки гипотез. Линейные гипотезы в линейной гауссовской модели. F-критерий для проверки линейной гипотезы в гауссовской линейной модели, его свойства. Пример: проверка однородности двух нормальных выборок.
24. Обобщенный (условный) метод наименьших квадратов, вычисление статистики для F-критерия с его помощью. Пример: проверка однородности для k нормальных выборок.
25. Критерии согласия в дискретном случае. Статистика хи-квадрат Пирсона в полиномиальной схеме Бернулли с m исходами. Теорема Пирсона о предельном распределении статистики хи-квадрат. Критерий согласия хи-квадрат, его состоятельность.
26. Проверка о принадлежности дискретного распределения параметрическому семейству. Идея применения метода максимального правдоподобия и обобщенная статистика хи-квадрат. Теорема о предельном распределении этой статистики в условиях регулярности (б/д). Параметрический критерий хи-квадрат. Критерий независимости хи-квадрат и его свойства. Критерий однородности хи-квадрат и его свойства.
27. Критерии согласия в непрерывном случае. Теорема Колмогорова (формулировка) и распределение Колмогорова. Доказательство первой части теоремы Колмогорова: доказательство независимости распределения статистики $\widehat{D}_n$ от вида истинной функции распределения. Критерий Колмогорова и его свойства.
28. Цилиндрическая и борелевская сигма-алгебры на $C[0,1]$. Сходимость по распределению случайных процессов с непрерывными траекториями на $[0,1]$, наследование сходимости при взятии непрерывной функции. Принцип инвариантности Донскера–Прохорова (б/д).
29. Лемма о сходимости $\sqrt{n}\widehat{D}_n$ по распределению к максимуму модуля броуновского моста на $[0,1]$. Броуновский мост, его распределение как предел условных распределений винеровского процесса.
30. Вычисление совместного распределения (m_n, M_n, S_n) для простейшего симметричного случайного блуждания. Вычисление совместного распределения (m, M, W_1) для

винеровского процесса. Нахождение распределения максимума модуля броуновского моста.

Статистическая физика

1. Равновесная макроскопическая термодинамика. Термодинамическая система. Термодинамическое равновесие.
2. Свойства равновесной термодинамической системы. Термодинамическая транзитивность. Термодинамический принцип аддитивности.
3. Способы задания термодинамической системы. Параметры термодинамической системы. Предельная статистическая процедура.
4. Работа термодинамической системы. Тепловое воздействие на систему. Калорическое и термическое уравнения состояния системы.
5. Квазистатические процессы. Принцип максимальной работы. Принцип максимального поглощения тепла.
6. Первое и второе начала термодинамики. Расчет термодинамических величин. Условие непротиворечивости термического и калорического уравнений состояния.
7. Третье начало термодинамики в формулировке М. Планка. Недостижимость абсолютного нуля температуры. Поведение калорических величин в области низких температур.
8. Метод термодинамических потенциалов. Аддитивные свойства. Формула Гиббса-Гельмгольца.
9. Микроскопические состояния. Оператор плотности. Смешанные состояния.
10. Микроканоническое распределение Гиббса. Основной постулат равновесной статистической механики. Связь статистического веса с энтропией системы.
11. Каноническое распределение Гиббса. Связь с термодинамическими величинами и главная асимптотика статистической суммы.
12. Большое каноническое распределение Гиббса. Подсчет дисперсии числа частиц.
13. Переход к статистической механике классических систем. Критерий применимости классического приближения. Температура статистического вырождения.
14. Сравнение квантового и классического описания термодинамических величин. Принцип тождественности частиц в квантовой теории.
15. Статистическая сумма неидеального классического газа. Конфигурационный интеграл.
16. Идеальные квантовые системы. Числа заполнения. Волновая функция системы тождественных частиц. Принцип запрета Паули. Статистики Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака.
17. Каноническое распределение Гиббса для идеальных квантовых систем. Большое каноническое распределение Гиббса для идеальных квантовых систем.
18. Уравнения состояния идеальных квантовых газов. Вырожденный нерелятивистский Ферми-газ. Структура основного состояния и элементарных возбуждений.

19. Выражения для термодинамических характеристик сильно вырожденного ферми-газа.
20. Идеальный нерелятивистский бозе-газ. Явление Бозе-конденсации. Термодинамические свойства бозе-газа при температуре меньшей температуры вырождения.
21. Идеальные неодноатомные газы. Учет вращений.
22. Теория теплоёмкости твёрдых тел. Модели Эйнштейна и Дебая.
23. Классические неидеальные системы. Корреляционные функции. Принцип ослабления корреляций. Связь корреляционных функций с характеристиками системы.
24. Цепочка уравнений Боголюбова для равновесных корреляционных функций. Слабонеидеальный газ с короткодействием.
25. Спиновые цепочки. Модели Изинга и Гейзенберга. Термальные состояния. Детектирование сцепленности в приложении к квантовым фазовым переходам.

Расслоения, характеристические классы, теория Ходжа

Раздел 1.

1. Дифференциальная геометрия расслоений.
2. Расслоения со структурной группой. Главные расслоения. Ассоциированные расслоения.
3. Векторные расслоения. Операции над ними. Классификация.
4. G-структуры на многообразиях.
5. Связности в главных расслоениях. Параллельный перенос. Группа голономии связности. Кривизна.
6. Связности в векторных расслоениях.

Раздел 2.

7. Характеристические классы векторных расслоений.
8. Характеристические классы. Конструкция Черна-Вейля. Характеристические классы комплексных расслоений (классы Черна, характер Черна).
9. Характеристические классы вещественных расслоений (классы Понтрягина, класс Эйлера).
10. Приложения характеристических классов.
11. Нечётный характер Черна.

Раздел 3.

12. Гармонические формы и теория Ходжа
13. Лапласиан на римановом многообразии. Оператор $*$ Ходжа. Пространство L^2. Оператор d^*. Свойства Лапласиана.
14. Теорема о разложении Ходжа.
15. Доказательство теоремы Ходжа (пространства Соболева, регулярность решений эллиптических уравнений).

16. Разложение Ходжа для комплекса Дольбо на комплексном многообразии.
17. Разложение Ходжа на кэлеровом многообразии.

Курс V, осень

Основы механики сплошных сред

Список вопросов

1. Сплошная среда. Определение. Пространственные (эйлеровы) и материальные (лагранжевы) координаты. Два подхода к описанию движения: лагранжев и эйлеров. Материальная (индивидуальная, полная) производная по времени. Формулы для вычисления ускорения по скорости при эйлеровом и лагранжевом походах.
2. Тензор деформаций (Коши–Грина). Определение. Механический смысл компонент тензора деформаций в декартовой системе координат в случае малых деформаций.
3. Выражение компонент тензора деформаций через производные от компонент вектора перемещения при конечных и малых относительных перемещениях. Формулы для коэффициента относительного изменения объема при малых относительных перемещениях. Уравнения совместности для компонент тензора малых деформаций (без вывода).
4. Тензор скоростей деформаций. Определение, механический смысл компонент, выражение компонент через компоненты вектора скорости. Формула для скорости относительного изменения объема. Механический смысл дивергенции скорости.
5. Вектор вихря. Определение. Ротор вектора. Теорема Коши-Гельмгольца о распределении скоростей в малой окрестности любой точки сплошной среды. Механический смысл вектора вихря. Потенциал скорости.
6. Формулы дифференцирования по времени интеграла по подвижному объёму и формула Гаусса-Остроградского.
7. Закон сохранения массы для индивидуального объема для неподвижного пространственного объёма. Дифференциальное уравнение неразрывности. Уравнение неразрывности для несжимаемой среды.
8. Количество движения объема сплошной среды. Силы, действующие на среду: массовые и поверхностные. Плотность массовых сил. Плотность поверхностных сил — вектор напряжений. Закон сохранения количества движения для индивидуального объема сплошной среды.
9. Формула Коши для вектора напряжений. Тензор напряжений. Определение. Механический смысл компонент тензора напряжений в декартовой системе координат. Дифференциальные уравнения движения.
10. Макроскопический и собственный моменты количества движения малой частицы и объема сплошной среды. Моменты внешних сил и пар. Закон сохранения момента количества движения для индивидуального объема сплошной среды. Дифференциальное уравнение момента количества движения при отсутствии собственного момента количества движения и пар сил. Симметрия тензора напряжений как следствие закона сохранения момента количества движения (при некоторых условиях).

11. Закон сохранения энергии — Первый Закон Термодинамики. Словесная формулировка и математическая формулировка в символическом виде. Внутренняя и кинетическая энергия сплошной среды. Притоки энергии извне к индивидуальному объему среды. Закон сохранения энергии для индивидуального объёма среды в случае, когда энергия к среде поступает только в виде работы внешних сил и притока тепла. Формула Коши для плотности притока тепла при теплопроводности. Вектор потока тепла. Дифференциальное уравнение энергии.
12. Уравнение кинетической энергии (теорема живых сил) для индивидуального объема сплошной среды. Работа внутренних поверхностных сил. Дифференциальное уравнение притока тепла (дифференциальное уравнение внутренней энергии).
13. Теплопроводность. Вектор потока тепла. Закон теплопроводности Фурье. Дифференциальное уравнение притока тепла для покоящейся теплопроводной среды при выполнении закона Фурье.
14. Второй закон термодинамики. Общая формулировка, содержащая понятие энтропии. Понятие обратимого и необратимого процесса. Математическая формулировка второго закона термодинамики для индивидуального объёма сплошной среды. Плотность энтропии, плотность притока энтропии при отсутствии диффузии, плотность производства энтропии.
15. Дифференциальная форма второго закона термодинамики (дифференциальное уравнение энтропии). Производство энтропии в процессе теплопроводности. Формулировка второго закона термодинамики, содержащая «некомпенсированное тепло».
16. Полная система уравнений для описания движения сплошной среды. Универсальные уравнения, следующие из законов сохранения. Определяющие соотношения.
17. Жидкости и газы в механике сплошных сред. Определение. Вектор и тензор напряжений в покоящихся жидкостях и газах.
18. Идеальная жидкость. Определение. Вид вектора напряжений $\overrightarrow{P}_n$ и компонент тензора напряжений p_{ij} в идеальной жидкости. Уравнение движения идеальной жидкости – уравнение Эйлера. Уравнение энергии и уравнение притока тепла для идеальной жидкости или газа. Полная система уравнений идеальной жидкости. Примеры уравнений состояния. Граничное условие на поверхности твердого тела для идеальной жидкости.
19. Вязкая жидкость или газ. Определение. Линейно-вязкая (ньютоновская) жидкость. Изотропная линейно-вязкая жидкость. Закон Навье – Стокса.
20. Уравнения Навье — Стокса. Граничные условия на поверхности твердого тела в вязкой жидкости
21. Турбулентность. Критерий Рейнольдса. Введение осредненных величин. Свойства операции осреднения. Уравнения Рейнольдса. Тензор турбулентных напряжений. Полуэмпирические модели турбулентности.
22. Модель упругой среды. Изотропная линейно-упругая среда. Закон Гука. Механический смысл модуля Юнга, коэффициента Пуассона, модуля сдвига.
23. Температурные деформации и напряжения в упругих средах. Полная система уравнений линейной теории упругости при изотермическом деформировании

24. Типичные граничные условия для уравнений теории упругости. Принцип Сен-Венана. Уравнения Навье – Ламе. Постановка задач теории упругости в перемещениях. Постановка задач теории упругости в напряжениях.

Квантовая теория поля

1. Преобразования Лоренца: определение. Группа Лоренца четырехмерного пространства-времени.
2. Уравнения Эйлера-Лагранжа в теории поля.
3. Лоренц-инвариантность действия и лоренц-ковариантность уравнений движения.
4. Определения скалярного и векторногополя (относительно преобразований Лоренца).
5. Определение канонического тензора энергии-импульса. Канонический тензор энергии-импульса для теории скалярного поля.
6. Энергия и импульс поля.
7. Теория Максвелла: действие, определение тензора напряженности, уравнения движения, калибровочные преобразования.
8. Комплексное скалярное массивное поле: действие, уравнения движения, $U(1)$ симметрия и соответствующий ей сохраняющийся ток.
9. Теория Дирака: действие, уравнения движения, гамма-матрицы.
10. Теория Янга-Миллса с калибовочной группой $SU(N)$: действие, определение тензора напряженности, уравнения движения, калибровочная инвариантность. Тождество Бьянки.
11. Гармонический осциллятор: гамильтониан, операторы рождения и уничтожения, коммутационные соотношения между ними.
12. Квантованное скалярное поле: запишите разложение поля по операторам рождения и уничтожения. Запишите гамильтониан вещественного скалярного поля в терминах операторов рождения и уничтожения.
13. Вакуум, одночастичные состояния и многочастичные состояния. Энергия и импульс таких состояний.
14. Пропагатор скалярного поля.

Спектральная теория операторов

1. Неограниченные операторы. Область определения. График. Плотная определенность, замыкаемость, замкнутость.
2. Сопряжённый оператор. Замыкаемость и плотная определенность сопряженного оператора.
3. Теорема о замкнутом графике.
4. Теорема Крейна-Красносельского
5. Спектр и резольвентное множество неограниченных операторов. Классификация частей спектра.

6. Резольвента и ее свойства. Операторы с компактной резольвентой.
7. Симметрические и самосопряженные операторы. Поле регулярности симметрического оператора. Теорема Хеллингера-Тёплица.
8. Критерий самосопряженности.
9. Преобразование Кэли. Самосопряженные расширения и их описание по фон Нейману.
10. Операторы вида T^*T. Нормальные операторы, свойства, примеры.
11. Функции некоммутирующих операторов, генераторы, индексы Фейнмана, свойства (раздвигание индексов, выделение линейного множителя).
12. Регулярные представления алгебры операторов на себе, свойства.
13. Дифференцирование в операторной алгебре. Формула дифференцирования сложной функции.
14. Закон умножения группы Ли в экспоненциальных координатах (Формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа).
15. Т-экспонента. Замкнутая формула для логарифма Т-экспоненты.
16. Разложения высоких порядков в некоммутативном анализе. Формулы Ньютона и Тейлора.
17. Формула перестановки фейнмановских номеров.
18. Формула композиции и формула сложной функции для псевдодифференциальных операторов.
19. Функции от унитарных операторов, их свойства.
20. Спектральная теорема в терминах умножения для унитарных операторов.
21. Преобразование Кэли. Спектральная теорема в терминах умножения для самосопряженных операторов.
22. Ограниченные борелевские функции от самосопряженных операторов, их свойства.
23. Ортогональные проекторы, их свойства. Спектральная мера. Скалярные меры, порожденные спектральной мерой, их свойства.
24. Интеграл по спектральной мере от ограниченных функций, свойства.
25. Интеграл по спектральной мере от неограниченных функций, область определения интеграла-оператора.
26. Спектральная теорема для унитарных операторов в терминах спектральной меры.
27. Спектральная теорема для самосопряженных операторов в терминах спектральной меры.
28. Экспонента от неограниченного самосопряженного оператора, свойства.
29. Теорема Стоуна о сильно непрерывной однопараметрической унитарной группе.
30. Теорема фон Неймана: достаточное условие сильной непрерывности однопараметрической унитарной группы.
31. Генераторы однопараметрических полугрупп. Теорема Хилле-Филлипса-Иосиды.

Курс V, весна

Гравитация (ОТО)

1. Гравитация в механике Ньютона. Гравитационный потенциал. Уравнение Пуассона. Функция Грина и гравитационное поле распределенной в пространстве материи. Равенство инертной и гравитационной масс. Принцип относительности Галилея. Как описать черную дыру в механике Ньютона. Космологическая модель в механике Ньютона.
2. Геометрия пространства-времени в специальной теории относительности. Группа Лоренца. Векторы и тензоры. Пространство-время как дифференцируемое многообразие. Преобразование систем координат.
3. Напоминание элементов дифференциальной геометрии: метрика, ковариантная производная, производная Ли, кривизна Римана, уравнение геодезической. Сколькими независимыми функциями определяется метрика? Сколько независимых компонент в тензоре Римана в пространстве-времени размерности D?
4. Принцип эквивалентности. Мысленные эксперименты с лифтом Эйнштейна. Обобщенный принцип относительности. Описание гравитационного поля как метрики на пространстве-времени. Уравнение геодезической как уравнение движения частицы в гравитационном поле. Уравнение для отклонения двух геодезических.
5. Уравнения Эйнштейна, вывод на основе принципа минимума действия, нерелятивистский предел. Космологическая постоянная.
6. Приближение слабого поля, гравитационные волны, две поляризации гравитационной волны.
7. Излучение гравитационных волн, формула Эйнштейна для мощности гравитационного излучения, излучение в бинарной системе.
8. Решение Шварцшильда для сферически-симметричного гравитационного поля, времени-подобные и световые геодезические, вывод прецессии перигелия Меркурия
9. Основные принципы космологии. Стандартная космологическая модель Фридмана-Робертсона-Уокера. Темная энергия и темная материя.
10. Упрощенный анализ космологических возмущений.